О.А. Торопова, к.т.н., доц.
А.А. Соин, студ., гр. ПИНЖ-21
Саратовский государственный технический университет

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ПАРАМЕТРИЗАЦИИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

Широкое распространение получил метод параметризации граничных условий (МПГУ) для численного решения задач механики деформируемого твердого тела. Опишем алгоритм метода. Рассмотрим двухточечную краевую задачу для системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$y' = f(s,y), \quad y_\alpha(0) = a, \quad y_\beta(1) = b; \quad ()' = d()/dx . \tag{1}$$

Здесь $y \in R^n$, f(s,y) - непрерывно-дифференцируемый оператор, действующий из пространства $[0,1] \times R^n$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_{n-m})$, $\beta = (\beta_1,...,\beta_m)$ – мультииндексы, $1 \le m < n$, $a \in R^{n-m}$, $b \in R^m$.

В общем случае задача (1) является некорректно поставленной, так как может иметь несколько решений, неустойчивых к малым возмущениям граничных условий. Введение (исходя из механического смысла задачи) некоторых дополнительных условий, выделяющих единственное решение $y^*(s)$, позволяет сузить область возможных решений до множества корректности. Будем считать, что такие условия допускают представление в виде

$$y_\beta(s) \in G(s) \subset R^m, \quad s \in [0,1] \tag{2}$$

Кроме того, предположим, что если $y_\beta^k(s)\,(k = 0,1,...)$ является β-решением системы (1), удовлетворяющим возмущенным граничным условиям $y_\beta^*(1) - b = \gamma^k$, то из сходимости $\gamma^k \to 0$ следует равномерная сходимость последовательности $\{y_\beta^k(s)\} \to y_\beta^*(s)$. Таким образом, имеем краевую задачу (1)–(2), решение которой существует и устойчиво по отношению к возмущению граничных условий. Это позволяет использовать для его отыскания один из известных численных методов, например, метод пристрелки. Основная его идея заключается, как известно, в сведении задачи (1)–(2) к численному решению системы m нелинейных алгебраических уравнений:

$$F(p) \equiv Y_\beta(1,p) - b = 0, \tag{3}$$

с m неизвестными начальными параметрами $(p_1,...,p_m) = p$. Здесь Y(x; p) – решение задачи Коши $y' = f(s,y),\ y(0) = a \oplus p$. Система (3) называется системой стыковки. Ее свойства определяются свойствами оператора $Y_\beta(x,p)$. Так, оператор F является непрерывно дифференцируемым, что следует из непрерывной дифференцируемости f и Y. Однако, он в общем случае неограничен и определен не на всех $p \in R^m$. Система (3) решается обычно методом Ньютона–Рафсона–Канторовича:

$$p^{k+1} = p^k - (\partial F(p^k)/\partial p)^{-1}\ F(p^k) \quad (k = 0,1,...) . \tag{4}$$

Отличительной его особенностью является высокая (квадратичная) скорость сходимости, если выбрано "достаточно хорошее" начальное приближение p^0 к вектору недостающих начальных параметров. Кроме того, необходимо, чтобы задача Коши $y' = f(s,y)$ была разрешима на всем отрезке [0,1], а функция f(x,y) ограниченна по своим переменным. Далее, начальная β – пристрелочная траектория $Y_\beta(s,p^0)$ должна принадлежать области G(s). Эти требования к стартовому вектору p^0 можно сформулировать в виде $p^0 \in P$, где $P = \{p \in R^m : (1,p)_\beta \in \mathrm{dom} Y,\ \ Y_\beta(s,p) \in G(s),\ \ 0 \le s \le 1\}$.

Для задачи (1)–(2) с умеренным на точном решении спектром матрицы Якоби определение допустимого стартового вектора $p^0 \in P$ осуществляется без особых затруднений. Если же среди локальных собственных значений матрицы J имеются большие по абсолютной величине (в этом случае значение константы Липшица $L = \| \delta f / \delta y \| = \max |\lambda_i| \succ 1$), что характерно, например, для задач расчета глубоководных нефтеподъемников), то множество P оказывается очень "узким" и отыскание хотя бы одного его элемента становится серьезной проблемой.

Из сказанного следует, что необходимы такие модификации пристрелочных алгоритмов, которые надежно работают в условиях возможного быстрого роста пристрелочных траекторий рассматриваемой дифференциальной системы и сходятся к точному решению при любом, даже очень "грубом" начальном приближении $p^0 \in G(0)$. Одной из таких модификаций является метод параметризации граничных условий (МПГУ). "Погрузим" (1) в однопараметрическое семейство краевых задач вида $y' = f(s,y),\ y_\alpha(0) = a,\ \ y_\beta(\tau) = y_\beta^0(\tau),\ \ 0 < \tau \le 1$, где $\tau = \tau(p) > 0$ – некоторая функция вектора недостающих начальных параметров $p = y_\beta(0) \in R^m$, $y_\beta^0(x)$ - известное β-решение "родственной" задачи:

$$y^{0/} = f^0(s,y^0), \ \ y_\alpha^0(0) = a, \ \ y_\beta^0(1) = b . \tag{5}$$

Условие (2) представим в виде:

$$y(s)\in G(s)=S(y^0_\beta;r), \qquad (6)$$

где $S(y^0_\beta;r)=\{p\in R^m,\ \|Y_\beta(s,p)-Y^0_\beta(s,p^0)\|\le r,\ 0\le x\le 1\}$, $Y_\beta(s,p^0)$ – известное β-решение соответствующей задачи Коши: $y^{0/}=f^0(s,y^0),\ y^0(0)=a\oplus p^0,\ r\in(0,+\infty)$.

Пусть

$$\tau(p)=\sup\{s\in[0,1]: Y_\beta(s^/,p)\in S(y^0_\beta;r_1),\quad 0\le s^/\le s\},$$
$$S(y^0_\beta;r_1)=\{p\in R^m:\ \|Y_\beta(s,p)-Y^0_\beta(s,p^0)\|\le r_1=r+\varepsilon],\ 0\le s\le 1 \qquad (7)$$

Для построения последовательности $\{p^k\}$: $\tau(p^{k+1})>\tau(p^k), k=0,1,...l\text{-}1<\infty$ будем использовать метод (4):

$$p^{k+1}=p^k-(\partial F(p^k)/\partial p)^{-1}\ F(p^k), \qquad (8)$$

где $F(p)=Y_\beta(\tau(p^k);p)-Y^0_\beta(\tau(p^k);p^0)$. Определяем в соответствии с (7) на каждом шаге итерационного процесса (8) функцию $\tau(p^k),\ k>0$, так, чтобы $\|F(p^k)\|=r_1$, исходя из найденного относительно известного стартового вектора p^0 значение $\tau(p^0)>0$.

На заключительном этапе алгоритма строим последовательность $p^l, p^{l+1},...$, минимизирующую норму функционала невязок $\|F(p)\|=\|Y_\beta(1,p)-b\|$ при соблюдении в (8) условий $\tau(p^k)=1,\quad \|F(p^k)\|>\|F(p^{k+1})\|,\quad k=l,l+1,...$

Рассмотрим особенности использования этого метода в задачах расчета длинномерных нефтеподъемников. В качестве функции прерывания пристрелочных траекторий в алгоритме МПГУ применялась $\tau(p)=\sup\{x\in(0,1]:\ |p-p^0|\le r_1,\ \ |u-u^0|\le r_2\}$, где r_1, r_2 – параметры метода, $p^0=\varphi^0_0(0),u^0$, φ^0 – известное аналитическое решение линеаризованного аналога задачи:

$$u^0(x)=c_1+c_2\,(T_1+x-1)^{1-\gamma_1}\quad+\gamma_4\,\gamma_6\,\Phi_1(x)/(1-\gamma_1),$$
$$\Phi_1(x)=\int_0^x v_c\,|\,v_c\,|\,dx-(T_1+x-1)^{1-\gamma_1}\int_0^x(T_1+x-1)^{\gamma_1-1}\ v_c\,|\,v_c\,|\,dx, \qquad (9)$$
$$C_1=-C_2\,(T_1-1)^{1-\gamma_1},\quad \varphi^0_0(x)=-u^{0/}/\gamma_6,\quad C_2=\gamma_4\,\gamma_6\,(1-\gamma_1)^{-1}\,\Phi_1(1)/((T_1-1)^{1-\gamma_1}-T_1^{1-\gamma_1}),$$

Здесь и в дальнейшем в расчетах принималось: длина райзера $H=1000m$, внешний диаметр трубопровода $D_0=0{,}61m$, внутренний диаметр трубопровода $d_0=0{,}59m$, коэффициент гидродинамического сопротивления $c_n=1{,}4$, плотность материала стенки райзера $\rho_t=8{,}2kHc^2/m^4$, плотность потока гидросмеси $\rho_f=1{,}25Hc^2/m^4$, плотность потока воды $\rho_w=1{,}025Hc^2/m^4$, скорость внутреннего потока жидкости $v_f=1{,}5\,m/c$, скорость течения, $E=2\cdot 10^8\ kH/m^2$. L – константа Липшица. Результаты тестирования алгоритма МПГУ для случая линейного профиля подводных течений приведены показали малую погрешность, малый объем используемой оперативной памяти ПЭВМ и высокое быстродействие программной реализации алгоритмов МПГУ позволяет эффективно их использовать для исследования НДС глубоководных райзеров и характеристик их длительной прочности.