

Аналіз можливостей використання середовищ комп'ютерної математики для розв'язку задач оптимізації систем

Математична оптимізація – процес розв'язання математичної задачі пошуку максимуму чи мінімуму цільової функції при обмеженнях на значення та тип шуканих невідомих. Оптимізаційна задача відтворює далеко не усі, лише певні характерні властивості реального об'єкту дослідження, що найбільше цікавлять дослідника, тож вона є основою для наближення чи певної заміни цього об'єкту його оптимізаційною моделлю, подальша реалізація якої здійснюється відповідними оптимізаційними методами та обчислювальними засобами. Складність об'єкту дослідження визначає рівень складності процесу оптимізаційного моделювання від постановки відповідної оптимізаційної задачі до формулювання і реалізації її математичної моделі та аналізу отриманих результатів, як правило, для цього потрібні потужні обчислювальні засоби – комп'ютери з відповідним програмним забезпеченням.

Ключові слова: оптимізація; система комп'ютерної математики; Mathematica; Matlab; Mathcad; Excel.

Ведення. Існує безліч методів, алгоритмів і програмних засобів вирішення завдань оптимізації. У зв'язку з цим справедливо очікувати можливості вирішення цих завдань системами комп'ютерної математики (СКМ), які представляють собою спеціалізовані програмні пакети рішення математичних задач найрізноманітнішого характеру. До числа популярних СКМ належать Mathematica, Matlab, Mathcad. Крім того, широкими можливостями для вирішення оптимізаційних завдань має табличний процесор Excel.

Ступінь обсягу класифікації завдань оптимізації визначається кількістю розглянутих класифікаційних ознак. У даній роботі в якості базових ознак виділено тип отриманого рішення і число критеріїв оптимізації (цільових функцій). З точки зору першої ознаки будемо розглядати завдання безперервної і дискретної оптимізації. У свою чергу, безперервна оптимізація з точки зору лінійності або нелінійності цільової функції і обмежень може бути лінійною і нелінійною. При цьому остання може бути умовною і безумовною. Також з точки зору кількості змінних цільової функції говорять про одновимірну (одна змінна) і багатовимірну (більше однієї змінної) оптимізації. При цьому завдання лінійної оптимізації завжди відносяться до числа багатовимірних, а задачі нелінійної оптимізації можуть бути як одновимірними, так і багатовимірними. Щодо другої ознаки мова йде про однокритерійну і багатокритеріальну оптимізації.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Різні аспекти використання СКМ як практичні, так і дидактичні розглядаються в працях таких науковців як В.З. Аладьєв, М.Л. Шишаков, В.П. Дьяконов, Т.В. Капустіна, Ю.Ф. Лазарєв, Ю.Г. Лотюк, Б.М. Манзон, В.Ф. Очков, Г.В. Прохоров, В.Г. Потьомкін, С.А. Раков, Ю.В. Триус та інших.

Вони, як правило, звертали увагу на вивчення та використання СКМ, таких як Mathcad [1], Matlab [2], Mathematica [3] та інших.

Цікавим є дослідження, яке проводить С.Стейнхаус [4]. Деякі з результатів тестування СКМ (станом на 15 квітня 2008 року), наведених у роботі [4], подано у таблиці 1, з якої видно, що кращими в середньому за всіма категоріями порівняння є системи Mathematica 6.0 (71,05 %) та Matlab 2008, а (69,58 %), далі Mathcad 14 (67,43) та Maple V11 (51,13 %).

При цьому за математичними характеристиками кращою є система Mathematica 6.0 (76,04 %), значно відстають системи Matlab 2008a (68,79 %) та Mathcad 14 (69,59).

Мета статті проаналізувати можливості використання системи комп'ютерної математики Mathematica, Matlab, Mathcad, Excel для розв'язування оптимізаційних задач.

Викладення основного матеріалу. Насамперед сформулюємо кілька загальних зауважень щодо розв'язування задач за допомогою комп'ютера, в тому числі, й з використанням СКМ. Перш ніж приступати до комп'ютерного дослідження математичної задачі, важливо детально продумати кілька питань:

– що відомо про вихідну задачу? Тобто які властивості вона має і чи всі дані враховуються при розв'язуванні задачі. Якими є вхідні дані, який інтервал їх зміни, як їх зміна може вплинути на процес розв'язування? Який результат потрібно отримати, який вигляд повинна мати передбачувана відповідь?

– як отримати результат? У першу чергу це включає вибір способу (аналітичне дослідження чи чисельний аналіз) та методів розв'язування задачі, необхідного інструменту (програмного продукту).

Потрібно здійснити вибір найкращого методу, тобто методу, за допомогою якого можна отримати правильний результат за прийнятний час.

Вияснити, як будуть перевірятися отримані результати на кожному кроці розв'язування. Це стосується як безпосередньо програмування, так і коректності отриманих величин.

Скільки часу потребує розв'язування поставленої задачі, включаючи час, необхідний для створення програмного коду, його редагування та відлагодження?

Таблиця 1

Результати тестування СКМ

Програма (версія)	Mathematica, 6.0	Matlab 2008a	Maple V11	Mathcad 14	Excel
Категорія порівняння	%	%	%	%	%
Інсталяція	96,27	76,52	87,54	84,63	35,41
Математичні операції (35 %)	76,04	68,79	55,10	69,59	60,86
Графічні операції (10 %)	84,63	88,49	60,88	67,43	49,89
Засоби програмування (11 %)	64,86	72,43	50,81	76,03	64,06
Швидкість обчислень (22 %)	39,07	54,68	11,16	52,11	21,85
Загальний результат	71,05	69,58	51,13	67,43	49,43

Дамо загальну характеристику системам комп'ютерної математики Mathematica, Matlab, Mathcad, Excel:

- розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем;
- символічні перетворення виразів;
- розв'язування різноманітних задач математичного аналізу (обчислення границь; диференціювання та інтегрування функцій як аналітично, так і чисельно; обчислення скінченних та нескінченних сум та добутків; розвинення функції в ряд Тейлора тощо);
- розв'язування диференціальних рівнянь та рівнянь у частинних похідних;
- розв'язування задач умовної та безумовної оптимізації (зокрема задач лінійного дискретного та нелінійного програмування);
- розв'язування задач лінійної алгебри (додавання, множення, обчислення оберненої та транспонованої матриць, обчислення визначника, мінорів, множення вектора на матрицю, пошук власних значень та векторів, розв'язування матричних рівнянь тощо);
- розвинена дво- та тривимірна графіка, можливість імпортування та експортування графіки в кілька форматів (BitMap (BMP), Device Independent Bitmap (DIB), Macpaint (MAC), Postscript (PS, EPS), Windows Enhanced Metafile (EMF), Tagged Image File Format (TIFF), Adobe Illustrator File (AI), Wave (WAV), MPS, EPSI, EPSTIFF, PDF, PSImage, XBitmap, PCL, PBM, MGF, SDTS, FITS, SVG, DICOM, GIF, JPG, DXF);
- власна мова програмування.

Крім того, системи містять пакети розширень, які дозволяють розв'язувати спеціальні задачі.

Matlab. У цій СКМ є можливість вирішення практично всіх типів (відповідно до прийнятої класифікації) завдань безперервної оптимізації. Так, вбудовані функції пакета Optimization Toolbox, асоційованого з Matlab, дозволяють отримувати в загальному випадку локально оптимальні рішення (у разі завдань опуклої оптимізації локальний оптимум, очевидно, буде і глобальним) наступних типів завдань: завдання лінійного і змішаного лінійного програмування; задач одно- і багатовимірної умовної і безумовної нелінійної оптимізації, в тому числі завдання квадратичного програмування (в цьому випадку цільова функція – квадратична, а обмеження – лінійні). Так, для вирішення завдань безумовної багатовимірної нелінійної оптимізації використовуються метод Нелдера-Міда (що відноситься до числа безградієнтних) і квазіньютонівські методи (які залежать від градієнта), засновані на апроксимації матриці Гессе (один з них – BFGS-метод (названий по імені його авторів – Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno)). Що стосується завдань умовної нелінійної оптимізації, то в пакеті Optimization Toolbox використовується метод послідовного квадратичного програмування (SQP-метод), заснований на квадратичній апроксимації функції Лагранжа, що враховує обмеження. Ще один пакет – Global Optimization Toolbox – розширює можливості пакета Optimization Toolbox для вирішення завдань оптимізації. За допомогою вбудованих функцій цього пакету можуть вирішуватися завдання оптимізації з високим ступенем нелінійності і з поганою обумовленістю, що не піддаються вирішенню за допомогою класичних методів оптимізації. Зокрема, це стосується завдань оптимізації з недиференційними цільовими функціями і цільовими функціями, що мають розриви. Крім того, за допомогою вбудованої функції gamultiobj, що входить до складу пакету Global Optimization Toolbox, можна вирішувати задачі багатокритеріальної оптимізації на основі генетичного алгоритму, реалізованого в цій функції, а також, як стверджують розробники пакету, – завдання стохастичної оптимізації. У той же час, система Matlab не містить вбудованих функцій для вирішення завдань дискретної (комбінаторної) оптимізації [5].

Mathematica. У цій СКМ реалізовано безліч функцій (LinearProgramming, Minimize, NMinimize, FindMinimum, Maximize, NMaximize, FindMaximum), комбінації яких дозволять користувачеві вирішувати основні типи завдань лінійної, також нелінійної (умовної і безумовної) оптимізації. Функції LinearProgramming, Minimize, Maximize дозволяють вирішувати задачі лінійної оптимізації, використовуючи симплекс-метод або ж метод внутрішньої точки (interior point method), в разі виконання завдання ЦЛП – метод гілок і меж. Функції NMinimize, NMaximize використовують різні інтерактивні методи (derivative-free iterative methods) для вирішення задач нелінійної оптимізації, наприклад метод Нелдера-Міда. FindMinimum і FindMaximum дозволяють вирішувати завдання нелокальної оптимізації шляхом використання інтеграційних методів на основі похідних, наприклад, методу Левенберга-Марквардта або градієнтного методу. Використання вбудованого розширення Combinatorica СКМ Mathematica дозволяє використовувати близько 450 функцій для побудови і дослідження графів, і як наслідок, представлені функції рішення задач дискретної оптимізації, інтерпретованих як задачі теорії графів, серед яких Dijkstra, ShortestPath, MinimumSpanningTree, NetworkFlow, TravelingSalesman [6].

Mathcad. Для чисельного рішення задач пошуку локального мінімуму або максимуму в Mathcad представлені вбудовані функції Minner, Minimize і Maximize. Щодо стосується виконання завдання лінійної оптимізації Mathcad за умовчанням використовує опцію Linear, що реалізує метод гілок і меж. У разі вирішення завдань нелінійної оптимізації передбачена можливість вибору методу: метод сполучених градієнтів, Левенберга-Марквардта або ж квазіньютонівський метод. На відміну від розглянутих вище СКМ, в Mathcad не передбачено спеціальне розширення для роботи з графами, однак користувач може досить гнучко використовувати вбудований потужний графічний редактор [9]. Однак, як було зазначено раніше, фактично користувач може сформулювати завдання на графах в термінах ЦЛП і використовувати розглянуті вище функції. Функціональні можливості Mathcad можуть бути істотно розширені за рахунок використання динамічно підключених бібліотек, розроблених з використанням високорівневих мов програмування.

Excel. До складу цієї програмної системи входить надбудова «Пошук рішення», за допомогою якої можуть бути вирішені завдання однокритерійної лінійної і нелінійної (умовної і безумовної) оптимізації. Так, для вирішення гладких задач нелінійної оптимізації використовується метод узагальненого понижуючого градієнта, а для негладких задач еволюційний алгоритм; для вирішення ЗЛП використовується симплекс-метод (при цьому ЗЛП може містити до 200 змінних і до 600 обмежень). Що стосується завдань дискретної оптимізації (зокрема, задач на графах), то ті з них, які можуть бути зведені до ЗЛП, вирішуються симплекс-методом [10].

Розв'яжемо приклад використовуючи Mathcad та Excel:

Задана функція з обмеженнями, потрібно знайти оптимальне рішення.

$$L(x) = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$$

Граничні умови :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 + x_3 \leq 6, \\ x_j \geq 0 \Rightarrow j = \overline{1,3} \end{cases}$$

Розв'язок задачі в MS Excel:

У вікні програми MS Excel створюємо таблицю з початковими даними (рис. 1).

	А	В
1	Линейное программирование в Excel	
2	x1=	0
3	x2=	0
4	x3=	0
5	Функция цели:	
6	L(x)=	=3*B2+4*B3+2*B4
7	Ограничения:	
8	x1+2x2+x3<=	=B2+2*B3+B4
9	2x1+x2+x3<=	=2*B2+B3+B4
10	x1+x2<=	=B2+B3
11	x2+x3<=	=B3+B4

Рис. 1. Вікно з початковими даними

За допомогою команди **Данные**→**Анализ**→**Поиск решения** відкриваємо вікно «Параметры поиска решений», в якому виконуємо необхідні установки рисунка 2.

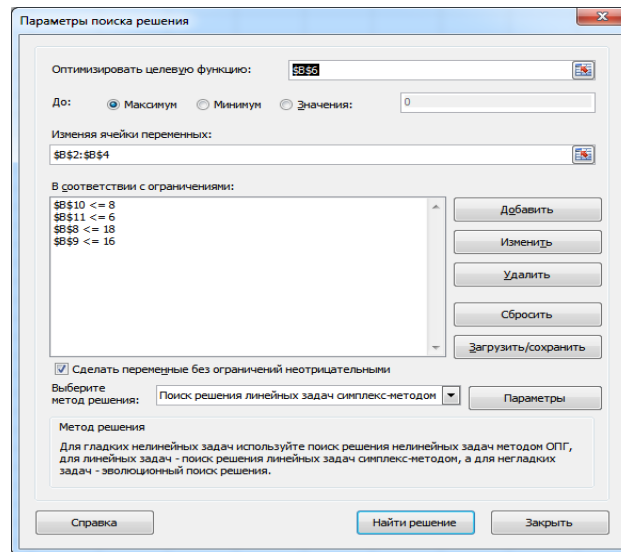


Рис. 2. Вікно з параметрами пошуку розв'язку

Натискаємо кнопку **Найти решение** та в вікні MS Excel одержали розв'язок задачі (рис. 3).

	A	B	C	D
1	Линейное программирование в Excel			
2	x1=		5	
3	x2=		3	
4	x3=		3	
5	Функция цели:			
6	L(x)=		33	
7	Ограничения:			
8	x1+2x2+x3<=		14	
9	2x1+x2+x3<=		16	
10	x1+x2<=		8	
11	x2+x3<=		6	

Рис. 3. Вікно з результатом розв'язку

Розв'язок задачі в Mathcad:

Линейное программирование

$$x1 := 0 \quad x2 := 0 \quad x3 := 0$$

$$z(x1, x2, x3) := 3 \cdot x1 + 4 \cdot x2 + 2 \cdot x3$$

Given

$$x1 + 2 \cdot x2 + x3 \leq 18$$

$$2 \cdot x1 + x2 + x3 \leq 16$$

$$x1 + x2 \leq 8$$

$$x2 + x3 \leq 6$$

$$x1 \geq 0 \quad x2 \geq 0 \quad x3 \geq 0$$

$$M := \text{Maximize}(z, x1, x2, x3)$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$z(M_0, M_1, M_2) = 33$$

Висновок. Сучасні версії системи Mathematica, Matlab, Mathcad, Excel містять вбудовані функції для розв'язування екстремальних задач, тому її можна використовувати при навчанні таких дисциплін як «Методи оптимізації», «Дослідження радіосигналів» та інших курсів, в яких досліджуються мінімаксні задачі. За допомогою даних СКМ можна розв'язувати класичну задачу на умовний екстремум такі оптимізаційні задачі, як одно- та багатовимірної оптимізації нелінійних функцій, лінійне (в тому числі й

цілочисельне) та нелінійне програмування. При цьому для розв'язання оптимізаційних задач одного типу використовують часом однакові методи (алгоритми). Так, наприклад, в СКМ Mathematica, Matlab для вирішення задач нелінійної безумовної багатовимірної оптимізації застосовується метод Нелдер-Міда, а для вирішення задачі лінійної оптимізації – симплекс-метод (цей метод також реалізований в ПС Excel).

Використання інформаційних технологій, зокрема СКМ, значно розширює можливості застосування математичних методів та моделей для дослідження процесів у різних сферах людської діяльності. Широкий набір засобів для комп'ютерної підтримки аналітичних, обчислювальних та графічних операцій роблять сучасні СКМ одними з основних засобів у професійній діяльності дослідників, програмістів, інженерів і т.д. Тому їх освоєння та використання в навчальному процесі при вивченні дисциплін надасть можливість підвищити рівень професійної підготовки студентів.

Список використаної літератури:

1. PTC User's Guide. Mathcad 14.0. – Access mode : <http://ru.scribd.com/doc/3239532/Mathcad-14-Users-Guide>.
2. *Иглин С.П.* Математические расчёты на базе MATLAB / *С.П. Иглин.* – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 640 с.
3. Wolfram Product. All Mathematica Applications. – Access mode : <http://www.wolfram.com/products/fields>.
4. *Steinhaus S.* Comparison of mathematical programs for data analysis (Edition 5.03) / *S.Steinhaus.* – Munchen : Germany. – 64 p. Access mode: <http://www.scientificweb.de/ncrunch/>.
5. *Иглин С.П.* Решение некоторых задач теории графов в MATLAB / *С.П. Иглин* // *Exponenta Pro. Математика в приложениях.* – 2004. – № 4 (4). – С. 28–33.
6. Wolfram Product. All Mathematica Applications. – Access mode : <http://www.wolfram.com/products/fields>.
7. Maple. Online Help. Access mode : <http://www.maplesoft.com/support/help/Maple/view.aspx?path=Optimization/General/Methods>.
8. *Morgan M.* Introduction to Maple's GraphTheory Package / *M.Morgan* // *MapleSoft.* – Maple Conference 2013 Proceedings, 2013. – P. 1–22.
9. *Лысенко И.В.* Анализ возможностей решения задач дискретной оптимизации средствами систем компьютерной математики / *И.В. Лысенко, В.О. Бутенко* // *Системы обработки информации.* – X. : ХУПС. – 2013. – Вып. 5 (112). – С. 96–101.
10. *Вежелис Т.М.* Решение оптимизационных задач в среде MS Excel 2013 / *Т.М. Вежелис, А.Б. Гордеев, А.Ю. Громов.* – Н. Новгород : ННГАСУ, 2014. – 50 с.
11. Availability assessment of computer systems described by stiff Markov chains: case study / *V.Kharchenko, O.Odarushchenko, V.Odarushchenko, P.Popov* // *Springer.* – CCIS (412). – 2013. – P. 112–135.
12. Wolfram Mathematica 9 Documentation center. – Access mode <http://reference.wolfram.com/mathematica/Combinatorica/tutorial/Combinatorica.html>.

References:

1. «PTC User's Guide. Mathcad 14.0», available at: <http://ru.scribd.com/doc/3239532/Mathcad-14-Users-Guide>
2. Iglin, S.P. (2005), *Matematicheskie raschety na baze MATLAB*, BKhV-Peterburg, 640 p.
3. Wolfram Product (2015), «All Mathematica Applications», available at: <http://www.wolfram.com/products/applications/mathoptpro/>
4. Steinhaus, S. «Comparison of mathematical programs for data analysis» (Edition 5.03), 64 p., available at: <http://www.scientificweb.de/ncrunch/>
5. Iglin, S.P. (2004), «Reshenie nekotorykh zadach teorii grafov v MATLAB», *Exponenta Pro. Matematika v prilozheniyakh*, Vol. 4 (4), Pp. 28–33.
6. Wolfram Product. All Mathematica Applications (2015), available at: <http://www.wolfram.com/products/applications/mathoptpro/>
7. Maple «Online Help», available at: <https://www.maplesoft.com/support/help/>
8. Morgan, M. (2013), «Introduction to Maple's GraphTheory Package», *MapleSoft. Maple Conference 2013 Proceedings*, Pp. 1–22.
9. Lysenko, I.V. and Butenko, V.O. (2013) «Analiz vozmozhnostey resheniya zadach diskretnoy optimizatsii sredstvami sistem komp'yuternoy matematiki», *Sistemi obrobki informatsii*, Vol. 5 (112), Pp. 96–101.
10. Vezhelis, T.M., Gordeev, A.B. and Gromov, A.Yu. (2014), *Reshenie optimizatsionnykh zadach v srede MS Excel*, NNGASU, N. Novgorod, 50 p.
11. Kharchenko, V., Odarushchenko, O., Odarushchenko, V. and Popov, P. (2013), «Availability assessment of computer systems described by stiff Markov chains», *Case study Springer*, CCIS (412), Pp. 112–135.
12. Wolfram Mathematica 9 Documentation center (2012), available at: <http://reference.wolfram.com/mathematica/Combinatorica/tutorial/Combinatorica.html>

Хоменко Жанна Миколаївна – кандидат технічних наук, старший викладач кафедри Біомедичної інженерії та телекомунікацій Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:

- математичні методи оптимізації;
- кінцеві пристрої абонентського доступу.

Тел.: +38 (097) 440–24–28.

E-mail: joanekhomenko@gmail.com.

Стаття надійшла до редакції 03.10.18.