УДК 519.161
DOI: https://doi.org/10.26642/tn-2017-2(80)-159-165

Т.М. Локтікова, ст. викл.
А.В. Морозов, к.т.н., доц.
В.О. Скачков, ст. викл.
Житомирський державний технологічний університет

Моделі послідовно-паралельного впорядкування транспортних операцій

Предметом розгляду в роботі є задача, що належить до детермінованої теорії розкладів. У роботі запропоновано модель задачі складання розкладу мінімальної довжини. Також розглядаються змістовні та математичні постановки задач, які є узагальненнями цієї задачі. Необхідність формулювання і розв'язання узагальнень задачі продиктовано потребою оптимізації виробничих процесів. Зокрема, розглядається процес функціонування гнучкого автоматизованого підприємства, до складу якого належить транспортно-складська система і паралельнодіючі технологічні лінії. При цьому під технологічними лініями можуть розглядатися конвеєри, обробні центри, лінії збирання тощо.

Розглянута в роботі математична модель задачі описує процес взаємодії транспортного механізму з деякою кількістю паралельно діючих технологічних ліній, на яких виконується певна множина робіт. Є інформація про роботи, призначені на кожну лінію. Також задано час виконання кожної роботи. Роботи є неперервними і не можуть розриватися. Виробничі лінії є незалежними, тобто функціонують незалежно одна від одної. Функції транспортного засобу полягають у забезпеченні ліній засобами, без яких не може бути розпочато певну роботу. Для її виконання транспортний механізм за вказаний час доставляє зі складу на лінію необхідні засоби і повертає на склад, затративши за тим же маршрутом на зворотній шлях задану кількість часу. Кожна робота не може розпочинатися раніше моменту доставки ресурсів, необхідних для її виконання. Потрібно знайти таку траєкторію руху транспортного засобу, що мінімізувала би час функціонування всієї системи. Показано, що задача може бути зведеною до задачі Джонсона 2-х n.

Ключові слова: *теорія розкладів; перестановки; дискретні оптимізаційні задачі; задача Джонсона.*

Постановка проблеми в загальному вигляді. Велика кількість задач, які виникають у будь-якій галузі народного господарства, так або інакше пов'язані із необхідністю визначення оптимального порядку виконання певних задач, що призводить до необхідності складання розкладу.

Задача складання розкладу полягає у виконанні заданої множини робіт (завдань) із використанням деякої множини машин (процесорів) або інших ресурсів. Мета полягає в тому, щоб при заданих властивостях ресурсів і при обмеженнях, які регламентують процес виконання робіт, упорядкувати роботи так, щоб оптимізувати бажану міру ефективності. Найбільш використовуваною мірою ефективності є загальний час виконання робіт або довжина розкладу: час між початком виконання першої роботи і закінченням виконання останньої. Розкладом мінімальної довжини назвемо оптимальний за швидкодією розклад. Модель процесу впорядкування, що описується в даній статті, містить наступні компоненти.

Модель завдань описується множиною з n робіт. Кожна робота утворюється із суворо впорядкованої сукупності стадій та розглядається як визначений технологічний процес. Під роботою розуміють завдання на виготовлення деталі, рейс автомобіля, послідовність фаз для розв'язання задачі на обчислювальній машині тощо. Під стадією будемо розуміти окрему операцію виготовлення деталі, частину рейсу автомобіля, що визначається відстанню між двома сусідніми пунктами, або фазу завантаження даних до обчислювальної машини.

Нехай $\pi = (j_1, j_2, ..., j_l, ..., j_n)$ – послідовність із перших стадій робіт $g_l = (\gamma_l, \beta_l) \in G, \ |G| = n.$ Позначимо: $b_{0 j_l} = \gamma_{j_l}, \ l = \overline{1, n};$

$$b_{ij_l} = \begin{cases} \beta_{i_l}, \text{ якщо } l\text{-та компонента в } \pi \text{ належить } G_i, \ i = \overline{1, m}; \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Задача складання розкладу мінімальної довжини полягає у побудові такої перестановки π^* з n компонент g_l, що доставляє мінімум функціоналу:

$$y(\pi) = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le l \le n} \left(\sum_{k=1}^{l} b_{0 j_k} + \sum_{k=1}^{n} b_{ij_k} \right) = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le l \le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{i_k} + \sum_{k=1}^{n} b_{ij_k} \right). \quad (1)$$

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Задачі, пов'язані з теорією розкладів розглядали у своїх роботах вчені: А.В. Панішев, О.М. Данильченко, О.С. Варакін [1, 3, 4, 10], В.С. Танаєв, В.В. Шкурба, А.Г. Журавок, М.Гери, Д.Джонсон, Х.Пападімітріу [2, 5–9] та ін.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо змістовні та математичні формулювання задач, які являють собою узагальнення задачі (1). Вони природним чином випливають із уявлень про процес функціонування гнучкого автоматизованого підприємства (ГАП), що містить транспортно-складську систему і паралельно діючі технологічні лінії, під якими розуміють обробні центри, лінії збирання, конвеєри.

Досліджувана наразі оптимізаційна модель календарного планування ГАП описує процес взаємодії транспортного механізму з m паралельно діючими технологічними лініями, на яких виконується множина робіт $H = \{h_j \mid 1 \le j \le n\}$.

На i-ту лінію, $i = \overline{1, m}$, призначено сукупність робіт $H_i, |H_i| = n_i$, і для s–ї роботи з H_i задано час її виконання. Передбачається, що:

$$H = \bigcup_{i=1}^{m} H_i,\ H_i = \varnothing,\ H_\mu \cap H_\nu = \varnothing,\ \mu \ne \nu. \quad (2)$$

Кожна робота h_j, $j = \overline{1, n}$, не має перериватися до повного завершення. Будь-які дві лінії функціонують незалежно одна від одної.

Складська система представлена в загальному випадку декількома накопичувачами, зв'язаними з технологічними лініями мережею транспортних маршрутів.

Функції транспортного засобу полягають у забезпеченні ліній засобами, без яких не може бути розпочато роботу h_{i_s}. Для її виконання транспортний механізм за час γ_{i_s} доставляє зі складу на лінію і необхідні засоби та повертає на склад, затративши за тим же маршрутом на зворотній шлях η_{i_s} одиниць часу. Робота h_{i_s} не може розпочатися раніше моменту доставки ресурсів, необхідних для її виконання.

Потрібно знайти таку траєкторію руху транспортного засобу, що мінімізувала би час функціонування всієї системи.

Програму переміщення транспортного засобу представимо послідовністю $\pi = (j_1, ..., j_k, ..., j_n)$, де j_k – індекс роботи з множини робіт H.

Кожному елементу послідовності π поставимо у відповідність величину:

$$b_{ij_k} = \begin{cases} \beta_{i_k}, \text{ якщо } k\text{-та робота в } \pi \text{ належить } H_i, \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$

Час функціонування ГАП залежить не лише від того, в якій послідовності обслуговуються лінії, але й від того, де знаходиться транспортний механізм у момент початку роботи системи та як розташовані лінії одна відносно одної (рис. 1). У зв'язку з цим виникають такі формулювання задачі.

а) у момент початку і закінчення функціонування ГАП засіб доставки знаходиться на складі, який є вихідним пунктом будь-якого маршруту (рис 1, а). Усі інші склади являють собою проміжні накопичувачі. У цьому випадку час роботи ГАП не залежить від відстані між лініями. Цільовий функціонал задачі має вигляд:

$$\mathrm{Z}(\pi) = max[C,\ W(\pi)], \quad (3)$$

де:

$$C = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k + \sum_{k=1}^{n} \eta_k\ , \quad (4)$$

$$W(\pi) = \max_{1 \le i \le m} \max_{1 \le l \le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{l-1} \eta_{j_k} + \sum_{k=1}^{n} b_{ij_k} \right), \quad (5)$$

$$\gamma_{j_k}, \eta_{j_k} \in Z^+. \quad (6)$$

Якщо час доставки зі складу на i-ту лінію засобів, необхідних для виконання роботи h_{i_s}, дорівнює часу руху транспортного механізму від лінії і до складу, то $\gamma_{j_k} = \eta_{j_k}$, $i = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, n_i}$, та

$$W_0(\pi)=\max_{1\le i\le m}\max_{1\le l\le n}\left(\sum_{k=1}^{l}\gamma_{j_k}+\sum_{k=1}^{l-1}\eta_{j_k}+\sum_{k=1}^{n}b_{ij_k}\right). \qquad (7)$$

Нехай $m=1$, тобто транспортний механізм обслуговує одну технологічну лінію. Тоді

$$W'(\pi)=\max_{1\le l\le n}\left(\sum_{k=1}^{l}\gamma_{j_k}+\sum_{k=1}^{l-1}\eta_{j_k}+\sum_{k=1}^{n}\beta_{j_k}\right). \qquad (8)$$

Твердження 1. У перестановці, що доставляє мінімум функціонала $W'(\pi)$, спочатку розміщаються компоненти з $\gamma_j+\eta_j\le\beta_j$ у порядку неспадання значень γ_j, а потім – компоненти з $\beta_j\le\gamma_j+\eta_j$ у порядку незростання значень $\beta_j-\eta_j$, $j=\overline{1,n}$.

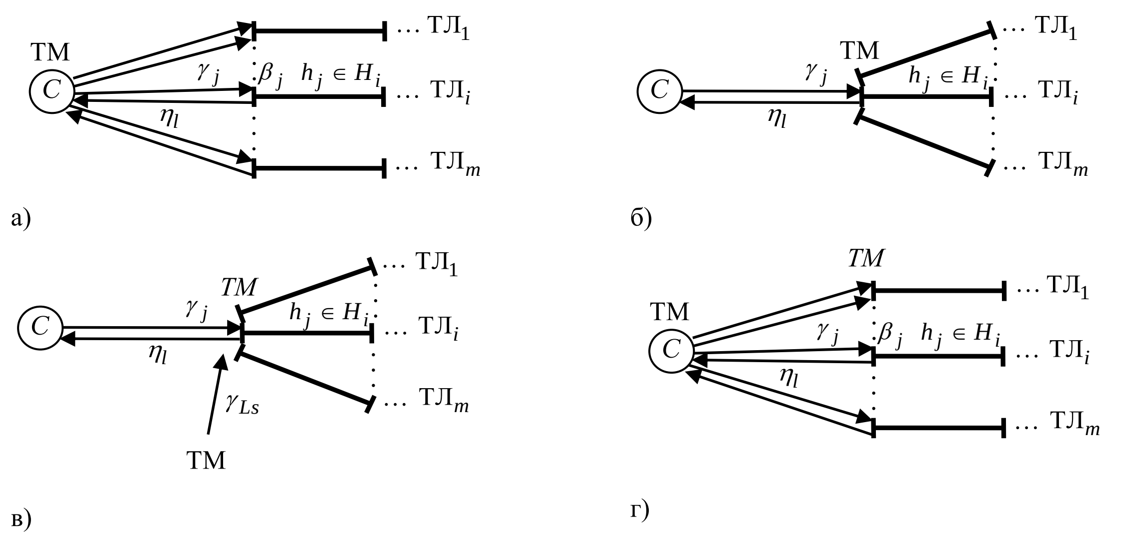

Рис. 1. Розташування транспортного механізму (ТМ) у момент початку роботи системи та розташування транспортних (ТЛ) ліній одна відносно одної

Доведення. Очевидно, що

$$W'(\pi)=\max_{1\le l\le n}\left[\sum_{k=1}^{l}\gamma_{j_k}+\sum_{j=1}^{n}\beta_j-\sum_{k=1}^{l-1}\left(\beta_{j_k}-\eta_{j_k}\right)\right]=\sum_{j=1}^{n}\beta_j+\max_{1\le l\le n}\left(\sum_{k=1}^{l}a_{j_k}-\sum_{k=1}^{l-1}b_{j_k}\right), \qquad (9)$$

де $a_{j_k}=\beta_{j_k}$, $b_{j_k}=\beta_{j_k}-\eta_{j_k}$. Отже $W'(\pi)$ – довжина розкладу в задачі Джонсона $2\times n$.

б) нехай технологічні лінії розташовані у безпосередній близькості одна від одної, а в момент початку і закінчення роботи ГАП транспортний механізм знаходиться в будь-якій з них (рис. 1, б).

Нехай

$$a_{j_k}=\eta_{j_k}+\gamma_{j_k},\ k=\overline{1,n},\ \eta_{j_k},\gamma_{j_k}\in Z^+. \qquad (10)$$

Тоді час функціонування всієї системи за умови, що транспортний механізм переміщується по траєкторії $\pi=(j_1,...,j_k,...,j_n)$, дорівнює:

$$R(\pi)=\max_{1\le i\le m}\max_{1\le l\le n}\left(\sum_{k=1}^{l}a_{j_k}+\sum_{k=1}^{l-1}b_{ij_k}\right), \qquad (11)$$

і функціонал $R(\pi)$ співпадає з $y(\pi)$ із точністю до позначень.

Якщо засіб доставки ресурсів обслуговує єдину лінію $(m=1)$, то $b_{ij_k}=\beta_{j_k}$, $k=\overline{1,n}$, тоді задача мінімізації $R(\pi)$ на множині всіх перестановок є задачею Джонсона $2\times n$:

$$R'(\pi)=\max_{1\le l\le n}\left(\sum_{k=1}^{l}a_{j_k}+\sum_{k=1}^{n}b_{j_k}\right). \qquad (12)$$

в) тепер припустимо, що на момент початку роботи системи транспортний механізм розташовується у початковому пункті маршруту довжини γ_{Ls}, $L\in\{1,...,m\}$, $s\in\{1,...,n_L\}$. Відстанями між будь-якими двома лініями можна знехтувати. Після завершення транспортних операцій засіб доставки має знаходитися біля будь-якої лінії (рис. 1, в). У цьому випадку при русі транспортного механізму по траєкторії час функціонування ГАП визначають у наступний спосіб:

$$U(\pi) = \gamma_{Ls} + \beta_{Ls} + \max_{1 \le i \le m} \max_{2 \le l \le n} \left(\sum_{k=2}^{l} a_{j_k} + \sum_{k=l}^{n} b_{ij_k} \right), \tag{13}$$

де $a_{j_k} = \gamma_{j_k} + \eta_{j_k}$, $k = \overline{2, n}$, $\gamma_{j_k} \ne \gamma_{Ls}$.

Таким чином, задача мінімізації $U(\pi)$ – це задача пошуку мінімуму (1) для випадку, коли відомо першу компоненту в траєкторії π^*.

При m = 1 отримаємо задачу Джонсона $2 \times n$, в умовах якої зазначено першу роботу в оптимальному розкладі:

$$U'(\pi) = a_1 + b_1 + \max_{2 \le l \le n} \left(\sum_{k=2}^{l} a_{j_k} + \sum_{k=l}^{n} b_{j_k} \right), \tag{14}$$

де $a_1 = \gamma_s$, $s \in \{1, ..., n\}$, $a_{j_k} = \gamma_{j_k}$, $\gamma_{j_k} \ne \gamma_s$, $b_1 = \beta_s$, $b_{j_k} = \beta_{j_k}$, $\beta_{j_k} \ne \beta_s$.

г) нехай у момент початку функціонування ГАП транспортний механізм знаходиться на складі, але після завершення роботи зупиняється біля будь-якої з ліній (рис. 1, г). Тоді, очевидно, цільовий функціонал задачі має вигляд (2);

д) розглянемо задачу а), умови якої містять додаткову вимогу: робота h_{i_s} може розпочатися не раніше δ_{i_s} одиниць часу після початку руху транспортного механізму від складу до лінії i, $i = \overline{1, m}$, $s = \overline{1, n_i}$.

При $\gamma_j = \delta_j$ для всіх $j = \overline{1, n}$, поставлена задача – це задача а). Якщо $\gamma_j > \delta_j$, $j \in \{1, ..., n\}$, то робота h_{i_s} може розпочинатися раніше моменту доставки засобів, необхідних для її виконання. У випадку $\delta_j > \gamma_j$ її виконання необхідно здійснити пізніше цього моменту. При $\gamma_j > \delta_j$ у припустимому розкладі π можливе перекриття транспортної і технологічної операцій роботи h_j, $j \in \{1, ..., n\}$.

На рисунку 2 графічно представлено один із припустимих розв'язків задачі при $m = 2$, $n = 4$, $\gamma_j = 6, 4, 4, 5$; $\eta_j = 6, 2, 1, 2$; $\beta_j = 13, 8, 6, 5$; $\delta_j = 3, 5, 3, 10$; $H_1 = \{h_1, h_2\}$, $H_2 = \{h_3, h_4\}$.

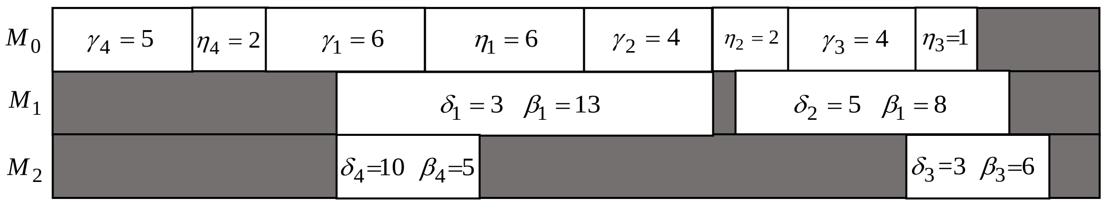

Рис. 2. Припустимий розв'язок задачі

Звертаючись до графічного представлення задачі, неважко переконатися, що її цільовий функціонал має вигляд:

$$D(\pi) = \max_{1 \le i \le m} \max \left[\delta_{j_1} + \sum_{k=1}^{n} b_{ij_k},\ \sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j + \eta_j \right),\ \max_{2 \le l \le n} \left(\sum_{k=1}^{l-1} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{l-1} \eta_{j_k} + \delta_{j_l} + \sum_{k=l}^{n} b_{ij_k} \right) \right], \tag{15}$$

де γ_{j_k}, η_{j_k}, δ_{j_k} – невід'ємні числа.

Задача полягає в тому, щоб на множині всіх перестановок $\pi = (j_1, ..., j_n)$ мінімізувати функціонал $D(\pi)$.

За $m = 1$ отримаємо:

$$D'(\pi) = \max \left[\delta_{j_1} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k,\ \sum_{j=1}^{n} \left(\gamma_j + \eta_j \right),\ \max_{2 \le l \le n} \left(\sum_{k=1}^{l-1} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{l-1} \eta_{j_k} + \delta_{j_l} + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ij_k} \right) \right]. \tag{16}$$

У термінах «роботи-машини» задача мінімізації функціонала $D'(\pi)$ являє собою частковий випадок задачі Небешими, що формулюється у такий спосіб.

Є n деталей, що обробляються на двох верстатах. Для кожної деталі i, $i = \overline{1, n}$, задано час γ_i обробки на першому верстаті та час β_i – обробки на другому верстаті. Деталь i можна обробляти на другому верстаті лише через δ_i одиниць часу після початку її обробки на першому верстаті. Обробка деталі i на другому верстаті не може бути закінчено раніше ніж через ε_i одиниць часу після завершення обробки цієї деталі на першому верстаті. Задано час переналагодження першого верстата η_i після того, як він виконає операцію тривалості γ_i. Порядок обробки деталей на обох верстатах однаковий.

Потрібно знайти таку перестановку деталей, що мінімізувала би загальний час їх обробки.

Звернемося до виразу для $D'(\pi)$:

$$\begin{aligned} D'(\pi) = max \Bigg\{ & \delta_{j_1} + \sum_{k=1}^{n} \beta_k + \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k + \eta_k) - \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k + \eta_k),\ \sum_{j=1}^{n} (\gamma_j + \eta_j), \\ & \max_{2 \le l \le n} \left[\sum_{k=1}^{l-1} \left(\gamma_{j_k} + \eta_{j_k} \right) + \delta_{j_l} + \sum_{k=l}^{n} \beta_{j_k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_{j_k} + \eta_{j_k} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_{j_k} + \eta_{j_k} \right) \right] \Bigg\} = \\ & \max_{2 \le l \le n} \left[\sum_{k=1}^{l-1} \left(\gamma_{j_k} + \eta_{j_k} \right) + \delta_{j_l} + \sum_{k=l}^{n} \beta_{j_k} + \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_{j_k} + \eta_{j_k} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\gamma_{j_k} + \eta_{j_k} \right) \right] \Bigg\} = \\ = max & \left\{ \delta_{j_1} + A + \sum_{k=1}^{n} (\beta_k - \gamma_k - \eta_k),\ A,\ \max_{2 \le l \le n} \left[\delta_{j_l} + A + \sum_{k=l}^{n} \left(\beta_{j_k} - \gamma_{j_k} - \eta_{j_k} \right) \right] \right\}, \end{aligned} \tag{17}$$

де

$$A = \sum_{k=1}^{n} (\gamma_k + \eta_k). \tag{18}$$

Таким чином,

$$D'(\pi) = A + \max_{1 \le l \le n} \left[\delta_{j_l} + \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_{j_k} - \gamma_{j_k} - \eta_{j_k} \right) \right] = A + D''(\pi), \tag{19}$$

$$D''(\pi) = \max_{1 \le l \le n} \left[\delta_{j_l} + \sum_{k=1}^{n} \left(\beta_{j_k} - \gamma_{j_k} - \eta_{j_k} \right) \right], \tag{20}$$

де $\delta_{j_l} \in Z^+$, $l = \overline{1, n}$, $\beta_{j_k}, \gamma_{j_k}, \eta_{j_k}$ - цілі, $k = \overline{1, n}$.

Тепер покажемо, що розв'язок задачі, яка полягає у мінімізації функціонала $D''(\pi)$, є розв'язком задачі Джонсона $2 \times n$ із тривалістю виконання стадій k-ї роботи на першій та другій машинах, рівними $a_k = \delta_k$, $b_k = \delta_k + \beta_k - \gamma_k - \eta_k$.

Підставимо значення для a_k і b_k у вираз, за яким обчислюється довжина розкладу π у задачі Джонсона $2 \times n$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \le l \le n} \left(\sum_{k=1}^{l} a_{j_k} + \sum_{k=1}^{l-1} b_{j_k} \right) + \sum_{k=1}^{n} b_k = \max_{1 \le l \le n} \left[\sum_{k=1}^{l} \delta_{j_k} - \sum_{k=1}^{l-1} \left(\delta_{j_k} + \beta_{j_k} - \gamma_{j_k} - \eta_{j_k} \right) \right] + \sum_{k=1}^{n} (\delta_k + \beta_k - \gamma_k - \eta_k) = \\ & = \max_{1 \le l \le n} \left[\sum_{k=1}^{l} \delta_{j_k} - \sum_{k=l}^{l-1} \left(\delta_{j_k} + \beta_{j_k} - \gamma_{j_k} - \eta_{j_k} \right) \right] + \sum_{k=1}^{n} \delta_k - \sum_{k=1}^{n} \delta_{j_k} = \max_{1 \le l \le n} \left[\delta_{j_1} + \sum_{k=l}^{l-1} \left(\beta_{j_k} - \gamma_{j_k} - \eta_{j_k} \right) \right] + \sum_{k=1}^{n} \delta_k. \end{aligned} \tag{21}$$

Звідси випливає, що мінімум функціонала $D''(\pi)$ забезпечує перестановка, в якій спочатку випливають такі її компоненти, що $\gamma_k + \eta_k \le \beta_k$ у порядку неспадання значень δ_k, а потім компоненти з $\beta_k \le \gamma_k + \eta_k$ у порядку незростання значень $\delta_k + \beta_k - \gamma_k - \eta_k$, $k = \overline{1, n}$.

Розглянемо приклад. Нехай $\gamma_j = 6, 4, 4, 8, 5$; $\eta_j = 6, 2, 1, 2, 2$; $\beta_j = 13, 8, 6, 3, 6$; $\delta_j = 3, 5, 3, 5, 10$.

Виберемо всі компоненти початкової послідовності $\pi = (1, 2, 3, 4, 5)$, для яких $\gamma_k + \eta_k \le \beta_k$:

$\gamma_1 + \eta_1 = 6 + 6 \le \beta_1 = 13$, $\gamma_2 + \eta_2 = 4 + 2 \le \beta_2 = 8$, $\gamma_3 + \eta_3 = 4 + 1 \le \beta_3 = 6$.

Для обраних компонент $\delta_1 \le \delta_3 \le \delta_2$. Для компонентів, що залишилися, обчислимо $\delta_4 + \beta_4 - \gamma_4 - \eta_4 = 5 + 3 - 8 - 2 = -2,\ \delta_5 + \beta_5 - \gamma_5 - \eta_5 = 10 + 6 - 5 - 2 = 9.$ У підсумку отримаємо перестановку $(1, 3, 2, 5, 4)$, що доставляє мінімум, $D''(\pi)$, а значить, і $D'(\pi)$.

Наведені міркування дозволяють сформулювати задачу мінімізації функціонала (3) в наступному вигляді.

Нехай

$$b'_{ij_k} = \begin{cases} max\left(0,\ \delta_{j_k} + \beta_{j_k} - \gamma_{j_k} - \eta_{j_k}\right), & \text{якщо } k\text{-та робота в } \pi \text{ належить } H_i, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$$

Потрібно на множині всіх перестановок π робіт $h_j,\ j = \overline{1, n}$, мінімізувати функціонал

$$D(\pi) = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le l\le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \delta_{j_k} + \sum_{k=l}^{n} b'_{ij_k} \right), \tag{22}$$

де δ_{j_k}, b'_{ij_k} – невід'ємні цілі числа, $k = \overline{1, n}$.

Введемо позначення: $L = \sum_{j=1}^{n} \eta_j$, $b''_{ij_k} = \begin{cases} max\left(0, \beta_{j_k} - \eta_{j_k}\right), & \text{якщо } k\text{-та робота в } \pi \text{ належить } H_i, \\ 0, & \text{інакше} \end{cases}$.

Твердження 2. Нехай перестановка π^*:

$$V\left(\pi^*\right) = \min_{\pi} V(\pi) = \min_{\pi} \max_{1\le i\le m} \max_{1\le l\le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{n} b''_{ij_k} \right). \tag{23}$$

Тоді π^* мінімізує функціонал (3).

Доведення. Для довільної перестановки π визначимо наступні індекси $i_0 \in \{1, ..., m\}$, $l_0 \in \{1, ..., n\}$, що:

$$W(\pi) = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le l\le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{l-1} \eta_{j_k} + \sum_{k=1}^{n} b_{ij_k} \right) = \sum_{k=1}^{l_0} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{l_0-1} \eta_{j_k} + \sum_{k=l_0}^{n} b_{i_0 j_k}. \tag{24}$$

З урахуванням введених позначень отримаємо:

$$W(\pi) = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le l\le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{n} b_{ij_k} - \sum_{k=1}^{l-1} \eta_{j_k} \right) + L = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le l\le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{j_k} + \sum_{k=1}^{n} b''_{ij_k} \right) + L = V(\pi) + L. \tag{25}$$

Зазначимо наступне. Невірним є, взагалі кажучи, зворотнє твердження про те, що якщо перестановка π^* мінімізує $W(\pi)$, то вона мінімізує і функціонал $V(\pi)$.

Висновки. Таким чином, для того, щоб знайти мінімум $W(\pi)$, достатньо для кожного значення $\beta_j,\ j = \overline{1, n}$, визначити $max\left(0, \beta_j - \eta_j\right)$, покласти $\beta_j = max\left(0, \beta_j - \eta_j\right)$, $\beta_{ij_k} = \beta''_{ij_k}$, $k = \overline{1, n}$, і побудувати перестановку, щоб доставляти мінімум $y(\pi) = \max_{1\le i\le m} \max_{1\le l\le n} \left(\sum_{k=1}^{l} \gamma_{j_k} + \sum_{k=l}^{n} b_{ij_k} \right)$.

Список використаної літератури:

1. *Панішев А.В.* Вступ до теорії складності дискретних задач / *А.В. Панішев, О.М. Данильченко, В.О. Скаков*. – Житомир : ЖДТУ, 2004. –236 с.
2. *Танаев В.С.* Введение в теорию расписаний / *В.С. Танаев, В.В. Шкурба*. – М. : Наука, 1975. – 256 с.
3. *Панишев А.В.* Модели и методы оптимизации замкнутых маршрутов на транспортных сетях / *А.В. Панишев, А.В. Морозов*. – Житомир : ЖГТУ, 2014. – 316 с.
4. *Панишев А.В.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера / *А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый*. – Житомир : ЖГТУ, 2006. – 300 с.
5. *Гэри М.* Вычислительные машины и труднорешаемые задачи / *М.Гэри, Д.Джонсон*. – М. : Мир, 1982. – 416 с.
6. *Бронштейн Е.М.* Детерминированные оптимизационные задачи транспортной логистики / *Е.М. Бронштейн, Т.А. Зайко* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 10. – С. 133–147.
7. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / *Э.Майника* – М. : Мир, 1981. – 323 с.
8. *Ловас Л.* Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике, физике, химии / *Л.Ловас, М.Пламмер*. – М. : Мир, 1998. – 653 с.
9. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / *Х.Пападимитриу, К.Стайглиц*. – М. : Мир, 1985. – 510 с.

10. *Matsiy O.B.* A Recurrent Algorithm to Solve the Weighted Matching Problem / *O.B. Matsiy, A.V. Morozov, A.V. Panishev* // Cybernetics and Systems Analysis. – 2016. – Vol. 52, Issue 5. – Pp. 748–757. – Access mode : DOI: 10.1007/s10559-016-9876-4.

References:

1. Panishev, A.V., Danylchenko, O.V. and Skachkov, V.O. (2004), *Vstup do teorii' skladnosti dyskretnyh zadach*, ZhDTU, Zhitomir, 236 p.
2. Tanaev, V.S. and Shkurba, V.V. (1975), *Vvedenye v teoryju raspysanyj*, Moskva, 256 p.
3. Panishev, A.V. and Morozov, A.V. (2014), *Modeli i metody optimizatsii zamknutykh marshrutov na transportnoy seti*, monografiya, ZhDTU, Zhitomir, 316 p.
4. Panishev, A.V. and Plechistyy, D.D. (2006), *Modeli i metody optimizatsii v probleme kommivoyazhera*, monografiya, ZhDTU, Zhitomir, 300 p.
5. Gjeri, M. and Dzhonson, D. (1982), *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi*, Moskva, 416 p.
6. Bronshteyn, E.M. and Zaiko, T.A. (2010), «Determenirovannye optimizatsionnye zadachi transportnoy logistiki», *Avtomatika i telemekhanika*, Vol. 10, pp. 133–147.
7. Maynika, E. (1981), *Algoritmy optimizatsii na setyakh i grafakh*, Mir, Moskva, 323 p.
8. Lovas, L. and Plammer, M. (1998), *Prikladnye zadachi teorii grafov. Teoriya parosochetaniy v matematike, fizike, khimii*, Mir, Moskva, 653 p.
9. Papadimitriu, Kh. and Stayglits, K. (1985), *Kombinatornaya optimizatsiya. Algoritmy i slozhnost'*, Mir, Moskva, 510 p.
10. Matsiy, O.B., Morozov, A.V. and Panishev, A.V. (2016), «A Recurrent Algorithm to Solve the Weighted Matching Problem», *Cybernetics and Systems Analysis*, Vol. 52, Issue 5, pp 748–757, available at: DOI: 10.1007/s10559-016-9876-4

Локтікова Тамара Миколаївна – старший викладач кафедри метрології та інформаційно-вимірювальної техніки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– цифрова обробка зображень та розпізнавання образів;
– комбінаторна оптимізація.

Морозов Андрій Васильович – декан факультету інформаційно-комп’ютерних технологій, доцент кафедри комп’ютерної інженерії та кібербезпеки Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– комбінаторна оптимізація;
– розподілені та паралельні системи.

Скачков Володимир Олександрович – старший викладач кафедри інженерії програмного забезпечення Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– системи штучного інтелекту;
– дискретна та комбінаторна оптимізація.

Стаття надійшла до редакції 04.10.2017.