Щехорський А.Й., доц.,к.ф.-м.н.,
Житомирський державний університет імені Івана Франка

АЛГОРИТМІЧНИЙ ПІДХІД ДО ПРОБЛЕМИ КОЛАТЦА

Широко відома гіпотеза Колатца побудови послідовності чисел, яку називають $3n + 1$ – послідовністю. Розглядається довільне натуральне число n, коли воно парне, то ділимо його на 2, до тих пір, доки не одержимо непарне число, а коли непарне, то множимо на 3 і додаємо 1 (отримаємо $3n + 1$). Над отриманим числом виконуємо ті ж самі дії. Гіпотеза Колатца в тому, що яке б не було початкове число n рано чи пізно отримаємо одиницю. Наприклад, для $n = 19$ послідовність непарних чисел Колатцабуде: 19, 29, 11, 17, 13, 5, 1. Послідовність операцій, за якою отримуються члени послідовності Колатца, назвемо перетворенням Колатца

Задача Колатца є частинним випадком більш загальної задачі. Наприклад, можна розглядати послідовності Колатца виду $5n + 3$, або $3n + 5$. Покладаючи послідовно $n = 1, 3, 5$ у формулі $3n + 5$ отримаємо послідовності: $1 \to 1$; $7 \to 13 \to 27 \to 43 \to 31 \to 49 \to 19 \to 29 \to 23 \to 37 \to 29$. Існує гіпотеза, що завжди, за формулою $3n + 5$ послідовність Колатца зводиться до циклічної послідовності. Взагалі, можна розглядати послідовності Колатца в загальному виді, породжені за формулою $pn + q$, де p і q довільні фіксовані непарні числа, $p \geq 3$, $q \geq 1$, а n пробігає деяку посдідовність непарних чисел, і ставити питання про кінцевий результат таких послідовностей.

Гіпотеза Колатца, як віломо не підтверджена і не відхилена. Пропонується наступний підхід до її розвязання, а саме – певний алгоритм приведення до числа одиниця. Для цього доцільно представляти непарні числа послідовності Колатца у двійковій системі числення, у канонічному виді:

$$N = 2^{s_1} + 2^{s_2} + \ldots + 2^{s_m} + 1, \qquad (1)$$

де $s_1 > s_2 > \ldots > s_m$, $s_m \geq 1$, s_i – натуральні числа, а також записувати перетворенні Колатца теж в двійковій системі числення, наприклад, записувати у вигляді двох операцій, $3N = (2+1)\,N = 2N + N$.

Ідея методу розвязку задачі Колатца полягає в тому, що послідовності перетворень Колатца, стосовно їх кількості застосувань, можна розбити на декілька груп, в результаті яких, старша степінь s_1 числа (1) може бути або зменшена, або лишатись незмінною. Результати першої групи перетворень отримуються завдяки наступному твердженню:

Твердження. Для числа (1), в якого $s \geq 2n$, за n кроків перетворення Колатца можна отримати число

$$\sum_{i=0}^{m-1}\left(2^{S_{m-i}-n} + C_n^1 2^{S_{m-i}-(n-1)} + \ldots + C_n^{n-1} 2^{S_{m-1}-(2n-1)} + C_n^n 2^{S_{m-1}-2n}\right) + 1$$

де C_n^k - число комбінацій із n елементів по k,. Можна довести, що отримане вихідне число буде менще вхідного числа і тому старша степінь вхідного числа буде більшою старщої степені вихідного числа.

Друга група перетворень стосується числа (1), в якого молодша (найменша) степінь рівна одиниці, $s_m = 1$, тобто маємо число

$$N = 2^{S_1} + 2^{S_2} + \ldots + 2^{S_{m-1}} + 2 + 1 \quad (s_{m-1} \geq 2) \qquad (2)$$

Коли $s_{m-1} \geq 4$, то застосування двічі перетворення Колатца до числа (2) приводить його до числа ($s_{m-1} \geq 4$): $\sum_{j=1}^{m-1} 2^{S_j - 1} + \sum_{j=1}^{m-1} 2^{S_j - 4} + 2.$

Отримано число, в якого старша степінь зменшилась.Таким чином, стосовно числа (2) лишається розглянути два випадки $s_{m-4} = 3$ і $s_{m-4} = 2$.

У випадку $s_{m-1} = 3$. Третя група перетворень складається з одного перетворення, яке приводить до числа ($s_{m-2} \geq 3$). $\sum_{j=1}^{m-2} 2^{S_j} + \sum_{j=1}^{m-2} 2^{S_j - 1} + 2^4 + 1$. Так як $S_{m-2} - 1 \geq 2$, то наступне перетворення належить першій групі. У випадку $s_{m-1} = 2$ четверта група перетворень складається з двох перетворень. Одне із них приводить дочисла, в якого старша степінь s_1+1. Якщо $S_{m-2} \geq 4$, то перетворення перщої групи зменщить старшу степінь s_1+1. як мінімум на 2. Таким чином, лишається випадок $s_{m-2} = 3$. В цому випадку пята група перетворень містить чотири перетворення, в результаті яких число приводиться до числа $\sum_{i=1}^{m-3}\left(2^{S_i} + 2^{S_i - 2} + 2^{S_i - 4}\right) + 2^6 + 2^4$.

В підсумку, аналіз останнього виразу показує, що при $S_{m-3} = 4$ старша степінь, значення якої не менше семи, ($s_1 \geq 7$), в результаті
чотирьохкратного перетворення Колатца, не змінюється. Коли $s_1 \leq 6$, то в результаті перетворенням Колатца компютерний перебір всіх варіантів приводить до одиниці.