Шупіков О.А. , аспірант,
Житомирський державний технологічний університет
Крижанівський В.Б., к.ф.-м.н., доц.,
Лундський університет, Швеція

ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ОБЕРНЕНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Одна з найбільш поширених постановок оберненої задачі теплопровідності полягає у визначенні невідомого теплового потоку через границю тіла на основі інформації про температури, які розвинулись у певних внутрішніх точках тіла. Наприклад, тепловий потік через поверхню космічного корабля при входженні у щільні шари атмосфери може бути оцінений на основі температур, виміряних у внутрішніх точках термозахисного покриття корабля. Об'єктивна інфомація про цей тепловий потік може бути використана для корекції траєкторії корабля з метою зменшення цього потоку.

Оскільки обернена задача теплопровідності відноситься до класу некоретних задач математичної фізики, то універсальних методів її розвязнання не створено. На практиці такі задачі розглядають в оптимізаційній постановці. Критерієм якості задачі оптимізації в цьому випадку є відхилиення виміряних температур від розрахованих. В результаті розвязку такої задачі визначаються параметри потоку, які мінімізують таке відхилення.

У випадку коли розподіл температури може бути з прийнятною точністю описаний за допомогою лінійної крайової задачі, відшукання невідомого потоку може бути зведене до розвязнання задачі лінійного програмування.

Ідею такого підходу проілюструємо на наступному простому прикладі у двовимірному просторі.

Нехай розподіл температур в деякій прямокутній області Ω описується з допомогою наступної крайової задачі:

$$div(k\ grad\ u) = 0\,,$$

$$u\big|_{S1} = u_1\,,\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{S2} = q\,.$$

де k - коефіцієнт теплопровідності, u_1 - температура, задана на границі $S1$, q - потік через границю $S2$, який необхідно визначити на основі вимірів температур у внутрішніх точках *P1, P2, P3, P4, P5* області Ω (рис.1).

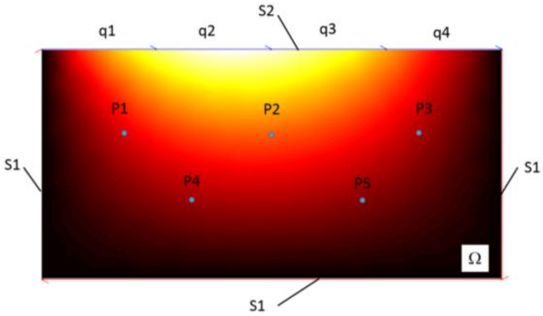

Рис. 1. Схематичне зображення області Ω

Розподіл потоку на границі $S2$ апроксимуємо у вигляді кусково-постійної функції, де значення *q1, q2, q3, q4* розглядаються як невідомі.

Для побудови задачі лінійного програмування небхідно обрахувати значення температур в точках *P1, P2, P3, P4, P5* від одиничних потоків *q1, q2, q3, q4* відповідно. Нехай a_{ij} – це температура в точці Pi від одиничного потоку qj . В звязку з лінійністю крайової задачі температуру у будь-якій точці можна визначити як суму температур від кожного одиничного потоку окремо. Функція цілі формується з міркувань мінімізації максимального відхилення виміряних температур від розрахованих.

В результаті отримаємо наступну задачу лінійного програмування:

$$\nu \to \min$$

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3 + a_{14}q_4 - u_1^{mes} \le \nu \\ -a_{11}q_1 - a_{12}q_2 - a_{13}q_3 - a_{14}q_4 + u_1^{mes} \le \nu \\ a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3 + a_{24}q_4 - u_2^{mes} \le \nu \\ -a_{21}q_1 - a_{22}q_2 - a_{23}q_3 - a_{24}q_4 + u_2^{mes} \le \nu \\ a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3 + a_{34}q_4 - u_3^{mes} \le \nu \\ -a_{31}q_1 - a_{32}q_2 - a_{33}q_3 - a_{34}q_4 + u_3^{mes} \le \nu \\ a_{41}q_1 + a_{42}q_2 + a_{43}q_3 + a_{44}q_4 - u_4^{mes} \le \nu \\ -a_{41}q_1 - a_{42}q_2 - a_{43}q_3 - a_{44}q_4 + u_4^{mes} \le \nu \end{cases}$$

де u_i^{mes} - температура, виміряна у точці Pi.

Ефективність запропонованого підходу була обгрунтована при розв'язнанні реальних задачах теплофізики.