Яремчук С.І.,к.ф.-м.н., проф.,
Іващенко С.М., магістрант
Житомирський державний технологічний університет

ПОБУДОВА МЕТОДУ ГІЛОК ТА МЕЖ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

Вступ. Задачі оптимального розміщення виникають в різноманітних галузях діяльності людини. Більшість з них (наприклад задачі розкрою, щільного розміщення) добре досліджені, та методи їх розв'язання широко використовуються на практиці. Але для окремих задач математичний апарат їх розв'язання все ще вимагає вдосконалення. До таких належить мінімаксна задача розміщення джерел фізичного поля на задані посадкові місця.

Мета роботи та постановка задачі: дане дослідження присвячене побудові методу гілок та меж розв'язання дискретної мінімаксної задачі розміщення джерел фізичного поля. Для цього потрібно ввести правило розгалуження та правило знаходження оцінок. Оцінки знаходиться в результаті розв'язання послаблених задач.

Побудовано наступну математичну модель задачі:

$$f(x) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x) \to min \tag{1}$$

$$f_k(x) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij}, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \;\; j \in [1:N], \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \;\; i \in [1:N], \tag{4}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \;\; i \in [1:N], \;\; j \in [1:N] \tag{5}$$

де N – розмірність задачі, K – кількість точок заміру, $i \in [1:N]$, $j \in [1:N]$, $k \in [1:K]$, c_{ij}^k — раціональні.

Подамо задачу (1) – (5), як задачу лінійного програмування з булевими змінними:

$$z \to min \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} c_{ij}^k x_{ij} \le z, \;\; k \in [1:K], \tag{7}$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} = 1, \;\; j \in [1:N], \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 1, \;\; i \in [1:N], \tag{9}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \;\; i \in [1:N], \;\; j \in [1:N]. \tag{10}$$

Введемо позначення X^0 для множини припустимих розв'язків (7) – (10), та позначення відповідної множини припустимих розв'язків $\overline{X^0}$ для послабленої задачі (умова $x_{ij} \in \{0,1\}$ замінена умовою $x_{ij} \ge 0$).

Алгоритм розв'язання задачі. Розв'язуємо задачу $z \to min$ на множині $\overline{X^0}$. Дана задача є задачею лінійного програмування, що характеризується розрідженою матрицею обмежень. Крім того матриця обмежень має досить великі розміри. Задача розмірністю N породжує матрицю розмірністю $(2 * N + K) \times (N * N + 1)$ і це не враховуючі додаткові та штучні змінні, що виникнуть при приведені умови задачі до зручного виду для застосування симплекс методу.

Звідси випливає, що симплекс метод є не найкращим методом для застосування в даному випадку. Для розв'язання даної задачі пропонується використати методи внутрішньої точки. Перевагами такого підходу є можливість працювати з розрідженою та погано обумовленою матрицею обмежень.

Разом з цим пропонується побудувати модифікацію методу внутрішньої точки, яка б додатково шукала та оновлювала нижню межу функції цілі на множині припустимих розв'язків. Це дозволить не розв'язувати задачу повністю, аби отримати оцінку множини. Особливо це актуально для вихідної задачі великої розмірності ($N > 60$)

Нехай $\{x^0, z^0\}^*$ – оптимальний розв'язок послабленої задачі. Якщо розв'язок x^0 цілочисельний, то цей розв'язок і є оптимальним планом вихідної задачі. Якщо розв'язок x^0 не є цілочисельне, тоді в якості оцінки $m\left(\overline{X^0}\right)$ беремо значення змінної z^0, що збігається зі значенням $f(x^0)$:

$$m\left(\overline{X^0}\right) = z^0 = f(x^0)$$

Також нововведенням в класичному методі гілок та меж є знаходження припустимого цілочисельного розв'язку $\widetilde{x_0}$ для кожної підмножини. Метою даного введення є швидке оновлення рекорду алгоритму і як наслідок зменшення кількості вершин в дереві розгалужень.

Знаходження розв'язку $\widetilde{x_0}$ здійснюється на основі розв'язку x^0. Для цього будується нова задача пошуку досконалого паросполучення з максимальною вагою на графі представленому матрицею x^0. Для розв'язання цієї задачі пропонується застосувати угорський алгоритм. Отримане в результаті значення функції цілі $f(\widetilde{x_0})$ використовується для оновлення рекорду. Однак замітимо, що функція цілі $f(\widetilde{x_0})$ не обов'язково є оцінкою множини $\overline{X^0}$, а тому не може бути використаною для її зондування.

Далі, вводимо змінну k:=1, що визначатиме номер ітерації. Визначаємо множинуQ^j, яка містить всі вершини, що висять на j-тій ітерації.

Обираємо множину $\overline{X_q^{k-1}}$ з найменшою оцінкою, для розгалуження:

$$m\left(\overline{X_q^{k-1}}\right) = \min_{i \in Q^{k-1}} m\left(\overline{X_i^{k-1}}\right)$$

Змінна, що ініціює розгалуження, обирається, як змінна з найбільшим значенням:

$$\left(x_q^{k-1}\right)_{gh} = \max_{i,j}\left(x_q^{k-1}\right)_{ij}$$

Так множина $\overline{X_q^{k-1}}$ розгалужується на дві множини $\overline{X_q^k}$ та $\overline{X_{q+1}^k}$ шляхом додавання обмежень, відповідно $x_{gh} = 1$ та $x_{gh} = 0$. Всі множини Q^k пере позначаються наступним чином:

$$Q^k = \left\{\overline{X_1^k}; \overline{X_2^k}; \dots; \overline{X_{|Q^k|}^k}\right\}$$

Знаходиться оцінка для першої множини, для цього розв'язується задача $z \to min$ на множині $\overline{X_q^k}$. Якщо множина $\overline{X_q^k}$ порожня, або оцінка нової множини більша за рекорд ($f\left(x_q^k\right) \geq m^*$), то відповідна множина $\overline{X_q^k}$ зондується, інакше перевіряється чи розв'язок x_q^k цілочисельний. Якщо x_q^kцілочисельний, тоx_q^k запам'ятовується, як претендент на оптимальний розв'язок, множина $\overline{X_q^k}$ зондується, а також оновлюється рекорд $m^* \coloneqq f\left(x_q^k\right)$. Аналогічно і для другої множини.

Для множин $\overline{X_q^k}$ та $\overline{X_{q+1}^k}$, які не були зондовані на попередньому кроці знаходимо $\widetilde{x_q^k}$ та $\widetilde{x_{q+1}^k}$ відповідно. Та використовуємо відповідні значення $f\left(\widetilde{x_q^k}\right)$ та $f\left(\widetilde{x_{q+1}^k}\right)$ для спроби оновити рекорд m^*. Так, якщо $f\left(\widetilde{x_q^k}\right) < m^*$, то $m^* := f\left(\widetilde{x_q^k}\right)$ і $\widetilde{x_q^k}$ запам'ятовується, як претендент на оптимальність. Аналогічно і для $\widetilde{x_{q+1}^k}$.

На основі рекорду m^* зондуються безперспективні вершини з множини Q^k.

Якщо на даному етапі множина Q^k порожня, то розв'язок, який було запам'ятовано (разом з m^*.), як претендент на оптимальний і є розв'язком вихідної задачі (1)-(5), інакше змінна k збільшується k:=k+1 і обирається нова множина $\overline{X_q^{k-1}}$ для розбиття на підмножини.

Висновок. Побудовано новий метод гілок та меж. Розроблений метод розв'язання є точним. Перевагами даного методу є:

- можливість розв'язання задач великої розмірності (до 100).
- невелика залежність швидкодії методу від кількості точок заміру.