Стецюк П.И., д.ф.-м.н., зав. отд.,
Институт кибернетики имени В. М. Глушкова НАН Украины

АЛГОРИТМ ОПИСАННЫХ ЭЛЛИПСОИДОВ ДЛЯ ЗАДАЧИ О НАИЛУЧШЕМ ЛИНЕЙНОМ КЛАССИФИКАТОРЕ

Задача о наилучшем линейном классификаторе состоит в нахождении гиперплоскости с максимальным зазором, которая разделяет два множества точек $X = \{x_1, ..., x_{m_1}\}$ и $Y = \{y_1, ..., y_{m_1}\}$ евклидового пространства R^n. Предполагается, что множества X и Y разделимы линейной гиперплос-костью $a^T z + b = 0$ (линейный классификатор). Линейному классификатору с максимальным зазором (maximum margin classifier) соответствует следующая оптимизационная задача [1]:

$$-2d^* = f^* = f(a^*, b^*) = \min_{(a,b)\in R^{n+1}} f(a,b)$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \le 1, \qquad (1)$$

где

$$f(a,b) = \max\{\max_{i=1,...,m_1}\{-a^T x_i - b\}, \max_{j=1,...,m_2}\{a^T y + b\}\}.$$

Здесь d^* – половина максимальной ширины полосы (задается двумя параллельными гиперплоскостями), которая разделяет множества *X* и *Y*. Величина $2d^*$ характеризует максимальный зазор (равен удвоенной полуширине d^*), а оптимальное решение a^* и b^* задает гиперплоскость $(a^*)^T z + b^* = 0$, проходящую через середину полосы шириной $2d^*$.

Задача (1) является условной задачей выпуклого программирования. С помощью негладкого штрафа она сводится к задаче минимизации негладкой выпуклой функции

$$F_P(a,b) = f(a,b) + P\max\{0, \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 1\}, \qquad (2)$$

для которой при $P > d^*$ ее минимум совпадает с решеним задачи (1). Для нахождения минимума функции $F_P(a,b)$ можно использовать алгоритмы минимизации негладких выпуклых функций. Если $n = 2 \div 10$, то целесообразно использовать методы эллипсоидов [2], которые позволяют избежать управления параметрами алгоритма и их сходимость не зависит от количества точек $m = m_1 + m_2$. Ниже опишем такой алгоритм и сделаем это для произвольного $\alpha > 1$ – коэффициента растяжения пространства . Для удобства неизвестные (a,b) обозначим одним вектором $u \in E^{n+1}$.

Инициализация. Положим величину штрафа $P = \min_{i,j} \|x_i - y_j\|$, стартовую точку $u_0 = 0$ и начальный радиус $r_0 = 1 + \max_{i,j}\{\|x_i\|, \|y_j\|\}$. Введем в рассмотрение матрицу B размера $(n+1)\times(n+1)$ и положим $B_0 = I_{n+1}$, где I_{n+1} – единичная матрица размером $(n+1)\times(n+1)$. Перейдем к первой итерации со значениями u_0, r_0 и B_0.

Пусть на k-й итерации найдены значения $u_k \in E^{n+1}$, r_k и B_k. Переход к $(k+1)$-й итерации состоит в выполнении такой последовательности действий.

Шаг 1. Вычислим $F_P(u_k)$ и $g(u_k) = \partial F_P(u_k)$. Если $r_k \|B_k^T g(u_k)\| \le \varepsilon$, то ОСТАНОВ $u^* = u_k$. Иначе переходим к шагу 2.

Шаг 2. Вычислим очередную точку

$$u_{k+1} = u_k - h_k B_k \xi_k, \quad где \quad h_k = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) r_k, \quad \xi_k = \frac{B_k^T g(u_k)}{\mathrm{P} B_k^T g(u_k) \mathrm{P}},$$

Шаг 3. Пересчитаем матрицу B_{k+1} и радиус r_{k+1}

$$B_{k+1} = B_k R_\beta(\xi_k),\ \beta = 1/\alpha, \quad r_{k+1} = (\alpha + \beta) \times r_k / 2,$$

где $R_\beta(\xi) = I_{n+1} + (\beta - 1)\xi\xi^T$ – оператор "сжатия" пространства с коэффициентом β в направлении $\xi \in E^{n+1}$, $\|\xi\| = 1$.

Шаг 4. Переходим к $(k+1)$-й итерации с x_{k+1}, r_{k+1} и B_{k+1}.

Теорема. При любом α таком, что $\alpha + 1/\alpha \le 2\sqrt[n+1]{\alpha}$ алгоритм сходится к $u^* = (a^*, b^*)$ – оптимальному решению задачи (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Украины, проект 07-01-14 (У)

***Литература*:**

1. Стецюк П.І., Березовський О.А., Журбенко М.Г., Кропотов Д.О. Методи негладкої оптимізації в

спеціальних задачах класифікації. – Препр. / НАН України. Ін-т кібернетики ім. В.М. Глушкова; 2009–1. – 29 с.

2. Стецюк П.И. Методы эллипсоидов и *r*-алгоритмы. – Кишинэу: Эврика, 2014. – 488 с.