Данильченко А.О., ст. викладач,
Житомирський державний технологічний університет

ЗАДАЧА ПРО ПАРОСПОЛУЧЕННЯ ЗІ ЗМІННОЮ СТРУКТУРОЮ ГРАФА

В окремих задачах про паросполучення на дводольних графах вводяться обмеження, що деякі дуги не можуть бути вибрані одночасно в паросполученнях. Наприклад, якщо дуга (x,y) вже міститься в паросполученні то дуга (v,w) не може включатися в дане паросполучення (не сумісні дуги). Зазначимо, що наборі цих дуг відомий наперед.

Сформулюємо математичну модель задачі про паросполучення зі зникаючими дугами (ППзД).

Задано дводольний граф $G=(X,Y,E)$. Для кожної дуги графа $(x_i, y_j)\ E,\ x_i \in X,\ y_j \in Y,\ i=1...m,\ j=1...n$. існують, насамперед задані множини дуг $C_{i,j}$ - які не можуть бути включені до паросполучення M, якщо в M включена дуга (x_i, y_j). Такі дуги тимчасово зникають з графа G при включені в паросполучення дуги (x_i, y_j) та стають знову видимими при її виключенні.

Таку залежність будемо називати відношенням слідства та позначати таким чином:

$$(x_i, y_j) \to C_{i,j} = \{(x_{i_1}, y_{j_1}),...,(x_{i_k}, y_{j_k})\}. \qquad (1)$$

Це означає, що дуга (x_i, y_j) не може бути включена в паро- сполучення в парі з іншою дугою (x_{i_p}, y_{j_q}) для будь якого $1 \le p \le k,\ 1 \le q \le k$ де $k=|C_{i,j}|$- потужність множини $C_{i,j}$. Однак всі дуги з множини $C_{i,j}$ не зв'язані між собою такими відношеннями, якщо це не обговорено окремо. Тоді з відношення слідства:

$(x_i, y_j) \to \{(x_{i_1}, y_{j_1}),...,(x_{i_k}, y_{j_k})\}$ слідують k

відношень:

$$\begin{aligned}
&(x_i, y_j) \to (x_{i_1}, y_{j_1});\\
&(x_i, y_j) \to (x_{i_2}, y_{j_2});\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&(x_i, y_j) \to (x_{i_k}, y_{j_k}).
\end{aligned} \qquad (2)$$

Якщо задача знаходження максимального паросполучення має розв'язок за поліноміальний час, то задача про паросполучення зі зникаючими дугами є NP-повною.

<u>Теорема.</u> Задача «Про паросполучення зі 'зникаючими' дугами» (ППзД) NP-повна в сильному смислі.

<u>Доведення.</u> Для доведення теореми треба вибрати деяку NP-повну задачу та звести її до задачі ППзД. В якості такої задачі візьмемо задачу "Про паросполучення, що обмежені по вазі"

Задача "Про паросполучення, що обмежені по вазі" (ППОВ).

<u>Умова.</u> Задані множини, що не перетинаються X та Y, кожне з яких містить m елементів, розміри $S(a) \in Z^+$ всіх елементів $a \in X \cup Y$ та вектор обмежень $\langle B_1,...,B_m \rangle$ з невід'ємними цілими координатами.

<u>Питання</u>. Чи можливо множину $X \cup Y$ так розбити на m множин, що не перетинаються $A_1, A_2,..., A_m$, кожне з яких містить по одному елементу з X та Y, що $\sum_{a \in A_i} S(a) = B_i$, для всіх i $(1 \le i \le m)$.

Розглянемо задачу ППОВ при умові, що вектор обмежень $\langle B_1,...,B_m \rangle$ не містить однакових елементів. Дана задача залишається NP-повною в сильному значенні. Побудуємо по обраній задачі частковий випадок задачі «Про паросполучення зі зникаючими дугами»

Сформуємо дводольний граф з m парами вершин $|V_1| = m,\ |V_2| = m$. Вершинам з множини V_1 призначимо ваги (призначення), що відповідають елементам множини X, а вершинам із множини V_2 призначення з множини Y. Дві вершини k,l з множин V_1 та V_2 зв'язані дугою якщо існує елемент вектора обмежень B_i такий,що $X_k + Y_l = B_i$. Зникання дуг проводиться по наступному правилу: якщо обрана пара з елементом B_i, то видаляються всі дуги (k,l), для яких $X_k + Y_l = B_i$. Тоді, якщо задача ППОВ має рішення, то простим переносом цього рішення на задачу ППзД отримаємо розв'язок останньої.

<u>Навпаки.</u> Нехай задача ППзД має рішення. Якщо всі пари мають різні значення отримаємо розв'язок ППОВ. Якщо дві пари мають однакове значення, то маємо протиріччя з умовою зникання дуг.

Рішення задачі ППзД не можливе поліноміальним алгоритмом. Однак її оптимальний розв'язок можливо отримати шляхом вибору найкращого розв'язку деякої множини звичайних задач про паросполучення.