

**В.В. Омельчук, к.т.н., доц.**  
 Військова частина, м. Житомир

**М.П. Фомін, к.т.н., доц.**  
 Житомирський національний агроекологічний університет

## ФУНКЦІЯ ВЗАЄМНОЇ КОРЕЛЯЦІЇ ЛІНІЙНО-ЧАСТОТНО МОДУЛЬОВАНОГО СИГНАЛУ З УРАХУВАННЯМ ЕФЕКТУ ДОПЛЕРАЇ

*Методами математичного аналізу отримано функцію взаємної кореляції імпульсної лінійно-частотної модуляції (ЛЧМ) радіолокаційного ехо-сигналу з урахуванням впливу ефекту Доплера на зміщення й швидкість зміни його частоти та побудовано її тіло невизначеності. Показано, що зазначене дозволяє позбавитись від невизначеності “дальність–швидкість” цілей і підвищити розрізнявальну здатність РЛС за їх дальністю та радіальною швидкістю.*

**Постановка проблеми в загальному вигляді.** У сучасних радіолокаційних станціях (РЛС) широко використовуються сигнали з лінійною частотною модуляцією (ЛЧМ), які при великій тривалості зондувальних сигналів (необхідна енергетика для локації об'єктів (цілей) на великій дальності) забезпечують високе розрізнення за дальністю за рахунок широкосмуговості сигналів. Математично ЛЧМ сигнал описується [1]:

$$u(t) = U(t) \cdot \cos \left[ 2 \cdot \pi \cdot \left( f_0 \cdot t + \frac{b \cdot t^2}{2} \right) + \varphi_0 \right], \quad (1)$$

де  $U(t)$  – амплітуда ЛЧМ сигналу;  $f_0$  – початкова частота ЛЧМ сигналу;  $\varphi_0$  – початкова фаза ЛЧМ сигналу, приймемо у подальших викладках  $\varphi_0 = 0$ ;  $b$  – швидкість зміни частоти (параметр модуляції) ЛЧМ сигналу,  $b = \Delta f / \tau_c$ ;  $\Delta f$  – девіація частоти ЛЧМ сигналу;  $\tau_c$  – тривалість ЛЧМ сигналу.

Однією з основних загальних характеристик ЛЧМ сигналу є його база, яка визначається як добуток девіації частоти на тривалість сигналу  $-\Delta f \cdot \tau_c$ . Збільшення величини бази ЛЧМ сигналу, що використовується у радіолокаційній системі, підвищує її потенційні інформаційні можливості – кількість, точність, детальність, достовірність радіолокаційної інформації тощо.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Теорія й застосування ЛЧМ сигналів досить добре розроблені й описані у багатьох наукових роботах. У роботі [2] аналізується групове запізнювання прийнятого й стиснутого ЛЧМ сигналу та похибки оцінки дальності радіолокаційної цілі, які пропорційні її радіальній швидкості. Зважаючи, що радіальні швидкості реальних радіолокаційних цілей в  $10^5$  раз менші від швидкості розповсюдження електромагнітного радіосигналу, то доплерівське зміщення частоти прийнятого ЛЧМ сигналу та спотворення його параметра модуляції будуть надто малі, а похибками оцінки дальності через ефект Доплера пропонується нехтувати. У роботі [3] запропонований алгоритм оцінки дальності за методом максимальної правдоподібності на основі лінійної фільтрації одиничних зміщених (через ефект Доплера) вимірів дальності з побудовою траєкторії польоту цілі на основі поліноміальної моделі. Автор роботи [4] пропонує вагове оброблення у часовій та частотній областях для зменшення енергетичних втрат і зниження рівня бокових пелюсток (зумовлених доплерівським зміщенням частоти) автокореляційної функції ЛЧМ сигналу. Проаналізовані багатоканальні за часом затримки та за частотою схеми для виявлення ЛЧМ імпульсів. У роботі [5] розглядаються, зокрема, функції неузгодженості для ЛЧМ сигналів обмеженої бази у вудвордському наближенні та узагальнення їх на ЛЧМ сигнали з дуже великою базою. У роботі [6], за результатами чисельного моделювання прийнятого ЛЧМ сигналу, робиться висновок, що ефект Доплера призводить до деградації функції невизначеності й, у той же час, до підвищення розрізнявальної здатності за дальністю та радіальною швидкістю цілей.

Особливістю вказаних вище робіт є те, що ефект Доплера враховується як просте зміщення всіх частот ЛЧМ зондувального сигналу. Таке наближення призводить до того, що при використанні ЛЧМ сигналів з великою базою не враховується, зумовлене ефектом Доплера, спотворення модулюючої функції (швидкості зміни частоти, параметра модуляції) зондувального сигналу. У той же час таке спотворення ЛЧМ сигналів з великою базою може бути використане для розрізнення об'єктів локації за радіальною швидкістю.

**Мета статті.** Отримання методами математичного аналізу функції взаємної кореляції імпульсного ЛЧМ радіолокаційного ехо-сигналу з урахуванням впливу ефекту Доплера на зміщення частоти й параметра модуляції та побудова й аналіз її тіла невизначеності.

**Викладення основного матеріалу дослідження.** Розглянемо зондувальний ЛЧМ сигнал  $u_c(t)$  з прямокутною обвідною  $U(t)$  у комплексній формі [1]:

$$u_c(t) = U(t/\tau_c) \cdot \exp\left[j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left(f_0 \cdot t + \frac{b \cdot t^2}{2}\right)\right]. \quad (2)$$

Амплітуду такого імпульсного сигналу можна описати так:

$$U(t/\tau_c) = \begin{cases} 1, & |t/\tau_c| \leq 1/2; \\ 0, & |t/\tau_c| > 1/2. \end{cases} \quad (3)$$

Радіолокаційний сигнал, який відбивається від точкового об'єкта (цілі), що рухається з постійною радіальною швидкістю, описується виразом:

$$u_a(t) = U\left[\frac{t \cdot (1 - \Delta v)}{\tau_c}\right] \cdot \exp\left\{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[f_0 \cdot t \cdot (1 - \Delta v) + \frac{b \cdot t^2}{2} \cdot (1 - \Delta v)^2\right]\right\}, \quad (4)$$

де  $\Delta v = v_r/c$  – показник доплерівського стискання (розширення) масштабу часу за рахунок руху об'єкта локації з радіальною швидкістю  $v_r$ ,  $c$  – швидкість розповсюдження електромагнітної енергії,  $\hbar = 3 \cdot 10^8$  м/с;  $t$  – поточний час, відлік якого здійснюється відносно середини прийнятого сигналу.

На виході приймального каналу, що повністю узгоджений за часовою затримкою та частотою Доплера з відбитим сигналом, буде сигнал  $g(\Delta\tau, \Delta v)$  [1]:

$$g(\Delta\tau, \Delta v) = \frac{1}{\tau_c} \cdot \int_{-t_c/2}^{t_c/2} \exp\left\{j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[f_0 \cdot (t - \Delta\tau) + \frac{b}{2} \cdot (t - \Delta\tau)^2\right]\right\} \times \\ \times \exp\left\{-j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left[f_0 \cdot (1 - \Delta v) \cdot t + \frac{b}{2} \cdot (1 - \Delta v)^2 \cdot t^2\right]\right\} dt, \quad (5)$$

де  $\Delta\tau$ ,  $\Delta v$  – неузгодження за часовою затримкою та доплерівським зсувом частоти між прийнятим й опорним сигналами.

Вираз (5) описує функцію взаємної кореляції приймального каналу для ЛЧМ сигналу, відбитого від об'єкта локації (цілі). Неузгодження за часовою затримкою визначає розрізнення за дальністю, а неузгодження за доплерівським зсувом частоти – розрізнення за радіальною швидкістю об'єкта локації.

Розрізнювальні здатності сигналу за дальністю та радіальною швидкістю можна визначити за допомогою модуля функції взаємної кореляції  $|g(\Delta\tau, \Delta v)|$ , яка є математичним описом тіла невизначеності прийнятого ЛЧМ сигналу, що спотворений ефектом Доплера. Для упорядкування цього опису в підінтегральній функції виразу (5) здійснимо групування складових, що впливають на змінну інтегрування  $t$ :

$$f_0 \cdot (t - \Delta\tau) + \frac{b}{2} \cdot (t - \Delta\tau)^2 - f_0 \cdot (1 - \Delta v) \cdot t - \frac{b}{2} \cdot (1 - \Delta v)^2 \cdot t^2 = \\ = b \cdot \Delta v \cdot \left(1 - \frac{\Delta v}{2}\right) \cdot t^2 + (f_0 \cdot \Delta v - b \cdot \Delta\tau) \cdot t + \left(\frac{b}{2} \cdot \Delta\tau^2 - f_0 \cdot \Delta\tau\right). \quad (6)$$

Позначимо:  $b \cdot \Delta v \cdot \left(1 - \frac{\Delta v}{2}\right) = A$ ;  $f_0 \cdot \Delta v - b \cdot \Delta\tau = B$ . Тоді вираз (6) набуде вигляду:

$$f_0 \cdot (t - \Delta\tau) + \frac{b}{2} \cdot (t - \Delta\tau)^2 - f_0 \cdot (1 - \Delta v) \cdot t - \frac{b}{2} \cdot (1 - \Delta v)^2 \cdot t^2 = \\ = (\sqrt{A} \cdot t)^2 + B \cdot t + \left(\frac{b}{2} \cdot \Delta\tau^2 - f_0 \cdot \Delta\tau\right). \quad (7)$$

Виділимо у виразі (7) повний квадрат відносно змінної  $t$  й отримаємо:

$$\begin{aligned}
& f_0 \cdot (t - \Delta\tau) + \frac{b}{2} \cdot (t - \Delta\tau)^2 - f_0 \cdot (1 - \Delta\nu) \cdot t - \frac{b}{2} \cdot (1 - \Delta\nu)^2 \cdot t^2 = \\
& = (\sqrt{A} \cdot t)^2 + B \cdot t + \left( \frac{b}{2} \cdot \Delta\tau^2 - f_0 \cdot \Delta\tau \right) = \\
& = (\sqrt{A} \cdot t)^2 + 2 \cdot \sqrt{A} \cdot \frac{B}{2 \cdot \sqrt{A}} \cdot t + \frac{B^2}{4 \cdot A} - \frac{B^2}{4 \cdot A} + \left( \frac{b}{2} \cdot \Delta\tau^2 - f_0 \cdot \Delta\tau \right) = \\
& = \left( \sqrt{A} \cdot t + \frac{B}{2 \cdot \sqrt{A}} \right)^2 - \frac{B^2}{4 \cdot A} + \left( \frac{b}{2} \cdot \Delta\tau^2 - f_0 \cdot \Delta\tau \right).
\end{aligned} \tag{8}$$

Обвідна модуля функції взаємної кореляції  $|g(\Delta\tau, \Delta\nu)|$  прийнятого сигналу залежить тільки від змінної  $t$ . Таким чином, отримуємо:

$$|g(\Delta\tau, \Delta\nu)| = \frac{1}{\tau_c} \cdot \left| \int_{-\tau_c/2}^{\tau_c/2} \exp \left[ j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left( \sqrt{A} \cdot t + \frac{B}{2 \cdot \sqrt{A}} \right)^2 \right] dt \right|. \tag{9}$$

Для приведення інтегралу (9) до табличного зробимо заміну змінної  $\sqrt{A} \cdot t + \frac{B}{2 \cdot \sqrt{A}} = z$  та враховуючи, що  $dt = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{A}} dz$  й при  $t = \pm \frac{\tau_c}{2}$  відповідно  $z = \pm \sqrt{A} \cdot \tau_c + \frac{B}{\sqrt{A}}$ , отримуємо:

$$\begin{aligned}
|g(\Delta\tau, \Delta\nu)| &= \frac{1}{\tau_c} \cdot \left| \int_{-\tau_c/2}^{\tau_c/2} \exp \left[ j \cdot 2 \cdot \pi \cdot \left( \sqrt{A} \cdot t + \frac{B}{2 \cdot \sqrt{A}} \right)^2 \right] dt \right| = \\
&= \frac{1}{2 \cdot \tau_c \cdot \sqrt{A}} \cdot \left| \int_0^{\sqrt{A} \cdot \tau_c + \frac{B}{\sqrt{A}}} \exp \left( \frac{\pi}{2} \cdot j \cdot z^2 \right) dz - \int_0^{-\sqrt{A} \cdot \tau_c + \frac{B}{\sqrt{A}}} \exp \left( \frac{\pi}{2} \cdot j \cdot z^2 \right) dz \right|.
\end{aligned} \tag{10}$$

Під знаком модуля різниця інтегралів Френеля  $\int_0^a \exp \left( \frac{\pi}{2} \cdot j \cdot z^2 \right) dz = C(a) + j \cdot S(a)$  [7].

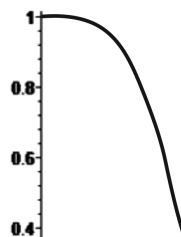
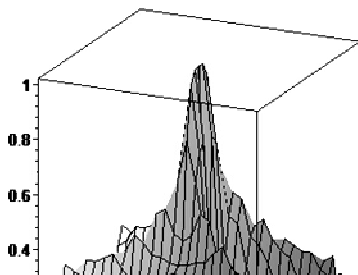
Для спрощення виразу (10) здійснимо другу заміну змінних  $\sqrt{A} \cdot \tau_c = x$  й  $B \cdot \tau_c = y$  та отримуємо:

$$\begin{aligned}
|g(\Delta\tau, \Delta\nu)| &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{A}} \cdot \left| \int_0^{\sqrt{A} \cdot \tau_c + \frac{B}{\sqrt{A}}} \exp \left( \frac{\pi}{2} \cdot j \cdot z^2 \right) dz - \int_0^{-\sqrt{A} \cdot \tau_c + \frac{B}{\sqrt{A}}} \exp \left( \frac{\pi}{2} \cdot j \cdot z^2 \right) dz \right| = \\
&= \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \left[ \left[ C \left( \frac{y}{x} + x \right) + j \cdot S \left( \frac{y}{x} + x \right) \right] - \left[ C \left( \frac{y}{x} - x \right) + j \cdot S \left( \frac{y}{x} - x \right) \right] \right| = \\
&= \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \sqrt{\left[ C \left( \frac{y}{x} + x \right) - C \left( \frac{y}{x} - x \right) \right]^2 + \left[ S \left( \frac{y}{x} + x \right) - S \left( \frac{y}{x} - x \right) \right]^2}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Таким чином, маємо модуль функції взаємної кореляції прийнятого ЛЧМ сигналу:

$$|g(\Delta\tau, \Delta\nu)| = \frac{1}{2 \cdot x} \cdot \sqrt{\left[ C \left( \frac{y}{x} + x \right) - C \left( \frac{y}{x} - x \right) \right]^2 + \left[ S \left( \frac{y}{x} + x \right) - S \left( \frac{y}{x} - x \right) \right]^2}. \tag{12}$$

Тіло невизначеності модуля функції (12), отримане за допомогою пакета прикладних програм "Maple", зображене на рисунку 1, а.



Аналіз виразу (12) на екстремум за допомогою прикладних програм “Maple” показує, що його максимум досягається при  $y = 0$ . Тоді:

$$y = B \cdot \tau_c = (f_0 \cdot \Delta v - b \cdot \Delta \tau) \cdot \tau_c = 0. \quad (13)$$

Це означає, що гребінь тіла невизначеності розташовується вздовж лінії  $f_0 \cdot \Delta v - b \cdot \Delta \tau = 0$ . У цьому випадку форма тіла невизначеності залежить тільки від змінної  $x$ , яка характеризує неузгодженість за частотою Доплера й залежить від бази ЛЧМ сигналу. Дійсно:

$$x = \sqrt{A} \cdot \tau_c = \tau_c \cdot \sqrt{b \cdot \Delta v \left(1 - \frac{\Delta v}{2}\right)} \approx \sqrt{\Delta f \cdot \tau_{\tilde{h}} \cdot |\Delta v|}. \quad (14)$$

Таким чином, значення піка для випадку  $y = 0$  визначається виразом:

$$|g(\Delta \tau, \Delta v)| = \frac{1}{x} \cdot \sqrt{C^2(x) + S^2(x)}. \quad (15)$$

Вигляд цієї функції наведено на рисунку 1, б.

Допустиме доплерівське неузгодження, відповідно до принципу “повної невизначеності”, знаходиться за умовою  $|g(\Delta \tau, \Delta v)|^2 = 0,5$  [1]. У виразі (15) ця умова досягається при значенні  $x = 1,318$  (результат, отриманий за допомогою прикладних програм “Maple”). Використаємо дане значення у (14) й отримаємо вираз для допустимого доплерівського неузгодження:

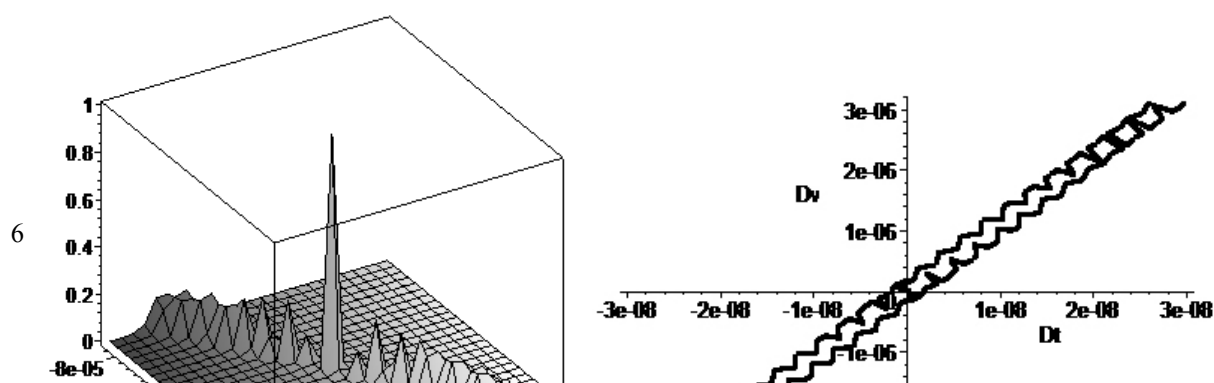
$$\Delta v = \pm \frac{1,737}{\Delta f \cdot \tau_c}. \quad (16)$$

Тоді розрізнення за радіальною швидкістю  $\Delta v_r$  визначається за виразом:

$$\Delta v_r = \frac{c}{2} \cdot \Delta v = \pm \frac{3 \cdot 10^8}{2} \cdot \frac{1,737}{\Delta f \cdot \tau_c} = \pm \frac{2,6 \cdot 10^8}{\Delta f \cdot \tau_c}. \quad (17)$$

Таким чином, урахування спотворення (зумовленого ефектом Доплера) швидкості зміни частоти ЛЧМ сигналу, що відбивається від рухомої цілі, дає математичну залежність розрізнювальної здатності за радіальною швидкістю від бази ЛЧМ сигналу: зростання бази ЛЧМ сигналу призводить до покращання розрізнювальної здатності за радіальною швидкістю.

Як приклад розглянемо багатofункціональну РЛС AN/FPS-108 американської системи контролю космічного простору, у якій використовується ЛЧМ сигнал з параметрами:  $f_0 = 1200$  МГц,  $\Delta f = 200$  МГц,  $\tau_{\tilde{h}} = 1,5$  мс [8]. Тіло невизначеності й діаграма невизначеності такого ЛЧМ сигналу наведено на рисунках 2, а, б відповідно (на зазначених рисунках прийняті позначення:  $Dt = \Delta \tau$ ,  $Dv = \Delta v$ ).



Розрізнявальна здатність РЛС AN/FPS-108 за радіальною швидкістю при використанні вказаного ЛЧМ сигналу, розрахована за допомогою формули (17), тобто з урахуванням впливу ефекту Доплера на параметр модуляції, дорівнює  $\pm 860$  м/с. Таке розрізнення є досить інформативним для радіолокаційної оцінки радіальної швидкості космічних об'єктів природного й штучного походження. Без урахування доплерівського спотворення розрізнення за радіальною швидкістю для ЛЧМ сигналу з прямокутною обвідною визначається за формулою:  $\Delta v_r = \pm \Delta f \cdot \tilde{f} / 2 \cdot f_0$  [9]. Для РЛС AN/FPS-108 розрізнення за радіальною швидкістю, без урахування доплерівського спотворення швидкості зміни частоти ЛЧМ сигналу, становить  $\pm 25 \cdot 10^6$  м/с. Настільки суттєво відмінні результати оцінки розрізнення за радіальною швидкістю зумовлені тим, що ефект Доплера в останньому випадку враховується тільки зміщенням частоти ЛЧМ сигналу.

#### Висновки:

1. Отримана функція взаємної кореляції імпульсного ЛЧМ радіолокаційного ехо-сигналу з урахуванням впливу ефекту Доплера на швидкість зміни його частоти й побудовано її тіло невизначеності.
2. Показано, що повне врахування доплерівського ефекту на радіолокаційний ЛЧМ сигнал створює можливість позбавлення від невизначеності “дальність–швидкість” і суттєвого підвищення розрізнявальної здатності РЛС за радіальною швидкістю цілей. Розрізнявальна здатність за радіальною швидкістю цілей РЛС із ЛЧМ зондувальним сигналом обернено пропорційна базі цього сигналу.
3. При значеннях бази ЛЧМ сигналу більше  $10^5$  виникає практична можливість моноімпульсного оцінювання дальності радіолокаційних цілей за часом затримки стиснутого ЛЧМ сигналу й радіальної швидкості за величиною зміни його параметра модуляції.

#### Список використаної літератури:

1. Кук Ч. Радиолокационные сигналы / Ч.Кук, М.Бернфельд : пер. с англ. под ред. В.С. Кельзона. – М. : Сов. радио, 1971. – 368 с.
2. Ширман Я.Д. Теория и техника обработки радиолокационной информации на фоне помех / Я.Д. Ширман, В.Н. Манжос. – М. : Радио и связь, 1981. – 416 с., ил.
3. Волочков Е.Б. Измерение дальности ЛЧМ сигналом при неизвестной доплеровской частоте / Е.Б. Волочков // Радиотехника. – 1991. – № 11. – С. 17–19.
4. Трухачев А.А. Радиолокационные сигналы и их применение / А.А. Трухачев. – М. : Воениздат, 2005. – 320 с.
5. Радиоэлектронные системы : Основы построения и теория : справочник / под ред. Я.Д. Ширмана. – 2-ое изд., перераб. и доп. – М. : Радиотехника, 2007. – 512 с.
6. Мрачковский О.Д. О деградации функции неопределенности широкополосного зондирующего сигнала с линейной внутриимпульсной частотной модуляцией / О.Д. Мрачковский, В.Е. Бычков, А.А. Олейник // Вісник Національного технічного університету “КПІ” / Радиотехніка. – 2009. – № 38. – С. 41–45.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.Корн, Т.Корн : пер. с англ. под общ. ред. И.Г. Арамановича. – М. : Наука, 1981. – 832 с.
8. Павлов В. Американские многофункциональные РЛС / В.Павлов // Зарубежное военное обозрение. – 1984. – № 1. – С. 59–62.
9. Stewart J.L. A theory of active sonar detection / J.L. Stewart, E.C. Westerfield // Proc. IRE. – 1959. – Vol. 47. – Pp. 872–881.

ОМЕЛЬЧУК Валентин Васильович – кандидат технічних наук, доцент, провідний науковий співробітник відділу військової частини, м. Житомир.

Наукові інтереси:

– радіолокаційні системи й технології.

ФОМІН Микола Павлович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, доцент кафедри вищої математики й теоретичної механіки Житомирського національного агроекологічного університету.

Наукові інтереси:

– математичний аналіз радіолокаційних систем.

Стаття надійшла до редакції 31.05.2012

**Омельчук В.В., Фомін М.П.** Функція взаємної кореляції лінійно-частотно модульованого сигналу з урахуванням ефекту Доплера

**Омельчук В.В., Фомин Н.П.** Функция взаимной корреляции линейно-частотно модулированного сигнала с учетом эффекта Доплера

**Omelchuk V.V., Fomin N.P.** Mutual correlation function of linear frequency modulated (LFM) signal with Doppler Effect accounting

УДК 621.396.962.3

**Функция взаимной корреляции линейно-частотно модулированного сигнала с учетом эффекта Доплера / В.В. Омельчук, Н.П. Фомин**

Методами математического анализа получена функция взаимной корреляции импульсного ЛЧМ радиолокационного эхо-сигнала с учетом влияния эффекта Доплера на смещение и скорость изменения его частоты и построено её тело неопределенности. Показано, что указанное позволяет избавиться от неопределенности “дальность-скорость” целей и повысить разрешающую способность РЛС по их дальности и радиальной скорости.

УДК 621.396.962.3

**Mutual correlation function of linear frequency modulated (LFM) signal with Doppler Effect accounting / V.V. Omelchuk, N.P. Fomin**

The function for mutual correlation of impulse linear frequency modulated (LFM) radar echo signal with Doppler Effect resulting bias and velocity of its frequency change is derived as well as ambiguous field by mathematic analysis means. As it was shown, the stated allows avoiding undefined “range-velocity” targets and enhancing radar resolution capability by its range and radian velocity.