С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., проф.
О.В. Ясинська, студ., V курс, гр. ПІ-39м, ФІКТ
Житомирський державний технологічний університет

РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ МЕТОДОМ ГІЛОК ТА МЕЖ

У зв'язку з розвитком технічного прогресу, виникає необхідність вирішення досить великої кількості задач математичними методами. В останні десятиріччя теорія мінімаксного оцінювання для різних систем неперервно розвивається. Саме тому розвиток методів вирішення задач даного типу є актуальним.

На практиці часто виникає задача проектування системи, якість роботи якої залежить від фізичних полів, що створюються її компонентами. Потрібно в заданій області розмістити джерела фізичного поля так, щоб обраний критерій якості досяг екстремального значення. У задачах пошуку оптимального розміщення джерел фізичного поля на розміщення джерел накладаються обмеження взаємного неперетину та невиходу за межі області розміщення. Крім того, можливі додаткові технологічні обмеження.

Складність розв'язання мінімаксної задачі розміщення джерел на задані посадкові місця призвела до того, що на сьогоднішній день не розроблено точного методу розв'язання цієї задачі, за допомогою якого можна було б розв'язати поставлену задачу за відносно короткий інтервал часу з урахуванням багатьох умов (розмірність задачі, кількість контрольних точок).

Постановка мінімаксної задачі з булевими змінними:

Функція цілі представлена у вигляді:

$$f(x)=\max_{k\in[1:K]} f_k(x)\rightarrow \min \tag{1}$$

ведемо керовані змінні:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, & \text{якщо } i\text{-те джерело призначене на } j\text{-те місце}\\ 0, & \text{якщо } i\text{-те джерело не призначене на } j\text{-те місце}\end{cases} \quad i\in[1:N], j\in[1:N]. \tag{2}$$

Обмеження:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N} x_{ij}=1, & j=[1:N],\\ \sum_{j=1}^{N} x_{ij}=1, & i=[1:N]\end{cases} \tag{3}$$

Нове значення функції цілі буде знайдене за формулою:

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{k} x_{ij} \tag{4}$$

Для побудови методу вирішено за основу взяти загальну схему методу гілок та меж.

Схема роботи алгоритму:

1. Знаходимо опорний план та наближення до розв'язку x^0, на матриці максимумів розв'язуємо задачу про призначення угорським алгоритмом, та знаходимо значення фізичного поля у кожній контрольній точці при заданому розміщенні
$$f_k(x^0)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{k} x_{ij}^{0}. \tag{5}$$
2. Знаходимо $\max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)$, присвоюємо $m^* = \max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)$ та формуємо множину Kmax:
$$K_{max}=\{i\in[1:K]: f_i(x^0)=\max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)\}. \tag{6}$$
3. Нехай маємо деяке x_s – наближення до розв'язку задачі, де $s=0,1,2,\ldots$
4. Перевіряємо, чи є дане розміщення (x_s) оптимальним хоча б для однієї контрольної точки y_k, де $k\in K_{max}$. Якщо так, то процес припиняється так як x_s – оптимальний розв'язок, інакше - п. 5.
5. Обрана множина розгалужується на дві підмножини – обирається змінна, що ініціює розгалуження. Для цього будується матриця максимумів C^{max} і знаходиться мінімальний елемент побудованої матриці. Якщо такий елемент один, то відповідна змінна обирається такою, що ініціює розгалуження. Якщо ж таких елементів декілька, то виконуються наступні обчислення:
$$\theta_{ij}=\min_{k\neq j} c_{ik}^{max}+\min_{m\neq i} c_{mj}^{max} \tag{7}$$
$$\max \theta_{ij}=\theta_{i_s j_s} \tag{8}$$
Змінна $x_{i_s j_s}$ ініціює розгалуження. В одній підмножині цю змінну зафіксовуємо 1, а в іншій – 0.
6. Знаходяться оцінки отриманих підмножин - формується підматриця матриці C^{min} для кожної з отриманих підмножин, для цього якщо на гілці що веде в дану вершину $x_{ij}=1$ викреслюємо рядок і

стовпчик, а якщо $x_{ij} = 0$ тоді $c_{ij} = \infty$. Розв'язуємо угорським алгоритмом задачу оптимального розміщення на отриманих підматрицях. Оцінка кожної підмножини має вигляд:

$$m(X^1) = \sum_{i,j \in T_1} \sum c_{ij} x_{ij} + \Psi_1 \qquad (9)$$

де Ψ_1 – оптимум задачі про призначення на підматриці змінних $\bar{C}_1$, а T_1 – множина пар індексів зафіксованих у відповідній вершині.

7. Отримані оцінки порівнюються з m^*. Якщо $m(X^1)$ більше дорівнює m^*, множина X^1 зондується. Якщо розмірність однієї з отриманих підматриць дорівнює 1 і відповідна їй множина не прозондована, то отримано припустимий розв'язок x^{s+1}, інакше перехід до п. 11.
8. Знаходиться відповідне значення функції цілі $\max_{k \in [1:K]} f_k(x^1)$. Це є оцінкою відповідної підмножини (множина складається з одного розміщення). Отримується нове m^*, що дорівнює $m^* = \max_{k \in [1:K]} f_k(x^1)$.
9. Знову обраховується множина $K_{max} = \{i \in [1:K] : f_i(x^1) = \max_{k \in [1:K]} f_k(x^1)\}$
10. Оцінки всіх висячих вершин порівнюються з m^*. Вершини, оцінки яких більше чи дорівнюють m^*, зондуються.
11. Якщо вершин, що висять нема, процес припиняється, за розв'язок обирається розміщення, що відповідає m^*. Інакше для розгалуження обирається та із вершин, що висять, яка має мінімальну оцінку і здійснюється перехід, у випадку, якщо m^* змінило своє значення на поточній ітерації, до п. 4, інакше до п. 6.

За допомогою мови програмування C# реалізовано програмний продукт для розв'язання мінімаксної задачі з булевими змінними методом гілок та меж. Розроблений точний метод розв'язання задач вказаного типу. Перевага алгоритму полягає в тому, що мінімаксні задачі з булевими змінними можна розв'язувати з великою кількістю точок заміру, проте поки що розмірність невелика.