

**В.П. Муравський, студ., IV курс, гр. ФК-16, ФОФ**  
 Науковий керівник – к.е.н., доц. В.В. Травін  
 Житомирський державний технологічний університет

### ПРОБЛЕМА ОПТИМІЗАЦІЇ ПЕНСІЙНОГО ТАРИФУ В КОНТЕКСТІ ПЕРЕХОДУ ДО НЕДЕРЖАВНОЇ СИСТЕМИ ПЕНСІЙНОГО ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ

Протягом останніх десятиліть на терені постсоціалістичних країн відбувалося формування ринкової системи господарювання. Одним із найважливіших питань сучасних соціально-економічних відносин є проблема пенсійного забезпечення.

Доцільними, в даному контексті, є заходи щодо реформування солідарної системи, яка вичерпала себе в сучасних умовах, в тому числі в Україні. У першу чергу, проблема полягає в необхідності розрахунку суми пенсійного внеску, який би забезпечив більш ефективне функціонування пенсійної системи.

Недержавна система пенсійного забезпечення дозволяє формувати великі обсяги фінансових ресурсів, а також розміщувати їх, забезпечуючи при цьому виплату високих пенсій усім учасникам фонду.

Проблема постсоціалістичних країн полягає не у відсутності таких інститутів, а в їх неефективності. Це пов'язано, по-перше, з недовірою більшості громадян до організацій, що надають будь-які фінансові послуги, а по-друге – з пенсійними внесками, які є надто високими порівняно з доходами, тобто з недоступністю для більшості населення таких послуг.

Питання недовіри вирішується не так швидко і легко, як хотілося б, але одним із варіантів його вирішення міг би бути повний перехід до недержавної системи пенсійного забезпечення, де функціонують фонди, фінансові ресурси яких були б достатні для того, щоб в учасників не виникало ніяких сумнівів щодо їх надійності.

Інше питання є більш складним і комплексним, а саме підвищення конкурентоспроможності недержавних пенсійних фондів.

Дана проблема є надто складна і потребує системного підходу до її вирішення, але ми б хотіли з акцентувати увагу на пенсійних внесках, оскільки саме вони є одним із визначальних критеріїв вибору способу пенсійного забезпечення.

Розглянемо умовний пенсійний фонд, в якому  $N$  учасників у віці  $x$  років вносять деяку суму коштів  $z$ . На момент виходу на пенсію сума, яку отримає учасник буде рівна

$$S = z(1+i)^t$$

Враховуючи те, що не всі учасники фонду досягають пенсійного віку  $x+t$ , учасники, які доживуть можуть збільшити свої надходження за рахунок осіб, які не досягли відповідного віку. Кількість осіб, яка доживає до моменту виплат можемо знайти таким чином:

$$N \times P(x < x+t) = \frac{l_{x+t}}{l_x},$$

де  $P(x < x+t)$  - функція розподілу випадкової величини; ймовірність того, що особа у віці  $x$  років доживе до моменту  $x+t$ ,  $P \in (0,1)$ ;

$l_x, l_{x+t}$  – кількість учасників на початок періоду і на момент виплат.

Таким чином, за рахунок учасників, які не дожили до моменту виплат, решта пенсіонерів отримає таку суму:

$$S^* = \frac{l_x}{l_{x+t}} z(1+i)^t$$

Для визначення розміру пенсійного внеску потрібно продисконтувати дану суму по  $i$ :

$$X = \frac{S^*}{(1+i)^t} \times \frac{l_{x+t}}{l_x}$$

Цілком очевидним є той факт, що  $X \ll z$ . Таким чином, за рахунок учасників, які не досягли моменту виплат можна зменшити розмір пенсійного внеску. Але це не є вихід із ситуації, оскільки пенсійний фонд не може і не повинен впливати на показники смертності задля зростання пенсійних виплат.

Однак є ще один параметр моделі, на який теоретично може впливати пенсійний фонд – це ставка дисконтування. З одного боку  $i$  – це альтернативна вартість залучення ресурсів при визначенні розміру пенсійного внеску, а з іншого – це норма доходності при визначенні суми виплат в у момент часу  $x+t$ .

Оскільки процентна ставка  $i$  є нормою доходності, то чудово було б знайти спосіб для її збільшення до певної максимальної межі.

Акумулюючи внески пенсійний фонд формує для себе інвестиційний портфель таким чином, щоб забезпечити визначений рівень виплат.

На сьогодні відомо багато моделей щодо оптимізації портфеля цінних паперів. Найбільш відомою і найпершою була модель Гарі Марковіца.

Суть методу зводиться до такого:

- кожен інвестор має свою функцію корисності  $\sigma, \bar{r}_i$  яка залежить від ризику портфеля  $\sigma$  та доходності  $i$ -го фінансового активу  $\bar{r}_i$ ;
- інвестор обирає особисто для себе комбінацію цінних паперів у портфелі;
- множина портфелів, які може обрати інвестор строго випукла;
- $\frac{dU}{d\sigma} < 0, \frac{dU}{d\bar{r}_i} > 0$ , тобто гранична корисність інвестора за ризиком спадає, а за доходністю зростає;
- повний диференціал функції корисності інвестора має вигляд:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial \bar{r}_i} d\bar{r}_i - \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma = 0 \Leftrightarrow \frac{d\bar{r}_i}{d\sigma} = \frac{\frac{\partial U}{\partial \sigma}}{\frac{\partial U}{\partial \bar{r}_i}}$$

Оскільки гранична норма заміщення ризику доходністю зростає, то карта кривих байдужості інвестора має додатній нахил, більше того вони також строго випуклі;

- таким чином інвестор обирає портфель, який відповідає такій умові:

$$Q^* = W\{q | r > r_{\min}\} \cap F\{q | \sigma < \sigma_{\max}\},$$

множина  $Q^*$  – не порожня, більше того, вона складається з таких портфелів, які містять максимальну доходність і мінімальний ризик.

Аналітично задача інвестора зводиться до максимізації цільової функції доходності портфеля цінних паперів при заданих обмеженнях, тому задача інвестора має вигляд:

$$R_p = \sum_{i=1}^n w_i \times \bar{r}_i \rightarrow \max$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

$$D_p = \sum_{i=1}^n w_i^2 \times D_i + 2 \sum_{i \neq j} w_i \times w_j \times cov_{ij} = D_p^*$$

$w_i$  – питома вага коштів, інвестованих в  $i$ -ий фінансовий актив;

$R_p$  – доходність портфеля цінних паперів;

$D_p$  – дисперсія портфеля.

Але перед тим як застосувати даний метод для вирішення завдання оптимізації пенсійного тарифу, необхідно визначити умови, при яких  $R_p$  та  $i$  є еквівалентними. Еквівалентність означає, що дані процентні ставки мають бути подібними, тотожними або змінюватись в одному напрямі тощо.

Оскільки процентні ставки є складними функціями, що залежать від багатьох змінних і ми об'єктивно не зможемо їх врахувати, та й не потрібно це на в даних умовах, тому ми можемо узагальнити всі фактори, що впливають на ці функції, використавши одну змінну – час. Випишемо необхідну і достатню умови еквівалентності процентних ставок:

1.  $\left[ \frac{dR_p}{dt} > 0 \cap \frac{di}{dt} > 0 \right] \cup \left[ \frac{dR_p}{dt} < 0 \cap \frac{di}{dt} < 0 \right],$
2.  $\frac{dR_p}{dt} = \frac{di}{dt}.$

Тепер безпосередньо переходимо до вирішення завдання інвестора. Враховуючи те, що цільова функція доходності портфеля задана на обмеженій і замкнутій множині, то існує екстремум цієї функції і він єдиний в силу строгої випуклості функції корисності інвестора та множини ефективних портфелів. Запишемо функцію Лагранжа для пенсійного фонду:

$$L = \sum_{i=1}^n w_i \bar{r}_i + \lambda_1 \left( \sum_{i=1}^n w_i - 1 \right) + \lambda_2 \left( \sum_{i=1}^n w_i^2 \times D_i + 2 \sum_{i \neq j} cov_{ij} \times w_i \times w_j - D_p^* \right) \rightarrow \max$$

Необхідною умовою пошуку екстремуму даної функції є рівність нулю усіх її частинних похідних, тобто:

$$\frac{\partial L}{\partial w_i} = 0, \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 0, \forall k \in \{1, 2\}$$

Таким чином ми отримали систему з  $n+2$  лінійних рівнянь, які можна розв'язати матричним способом:

$$w = A^{-1} \times b,$$

де  $w$  – вектор-стовпець невідомих;

$A^{-1}$  – матриця обернена до матриці коефіцієнтів при змінних;

$b$  – стовпець вільних членів.

Отже, ми знайшли частки, які повинні припадати на кожен фінансовий актив у портфелі цінних паперів для того, щоб отримати максимальну доходність при заданому рівні ризику. Питання полягає лише в тому, на який максимальний ризик готовий піти пенсійний фонд для забезпечення зниження розміру регулярного пенсійного внеску.

Вирішення даної проблеми підвищить конкурентоспроможність недержавних пенсійних фондів, допоможе позбавитись від проблеми невисоких пенсій і навантаження на державний бюджет.

Крім того, така система фінансування пенсійних виплат наділяє економіку дешевими фінансовими ресурсами для реалізації інвестицій, а також дозволяє підвищити рівень споживання в національній економіці. Таким чином саме застосування системи недержавного пенсійного забезпечення є вирішенням багатьох проблем і є вигідним для усіх учасників таких відносин.