

С.І. Яремчук, к.ф.-м.н., проф.

Л.В. Рудюк, к.ф.-м.н., доц.

Житомирський державний технологічний університет

**ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК
МЕТОДІВ РОЗЕНА ТА G-ПРОЕКЦІЇ**

Розглянуто задачу оптимізації розміщення геометричних об'єктів прямокутної форми в прямокутній області. Пропонуються класичний метод Розена та побудований метод G-проекції для розв'язання цієї задачі. Визначаються часові характеристики методів за допомогою статистичного експерименту.

Вступ. Розглянемо таку задачу. В прямокутній області Ω необхідно знайти таке розміщення m геометричних об'єктів прямокутної форми $D_j, j = 1, \dots, m$, при якому обраний критерій якості досяг би екстремуму:

$$f(Z) \rightarrow \text{extr}, Z \in G, \tag{1}$$

де $f(Z)$ – неперервна та неперервно-диференційована на G функція з градієнтом, що задовольняє на множині G умові Липшиця.

Основними характеристиками прямокутного об'єкта є його розміри $l(l_1^j, l_2^j, \dots, l_n^j)$ та положення у просторі, що визначається координатами його полюса $Z^j(\xi_1^j, \xi_2^j, \dots, \xi_n^j), j = 1, \dots, m$ [1]. Полюсом прямокутника будемо називати точку перетину його діагоналей. Очевидно, розміщення m прямокутних об'єктів буде визначатись вектором $Z = (Z^1, Z^2, \dots, Z^m)$. Розміри області розміщення Ω визначаються вектором $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Система координат задається так, щоб початок координат знаходився в вершині n -вимірного паралелепіпеда Ω , координатні осі співпадали з його ребрами і були спрямовані так, щоб точки Ω мали невід'ємні координати. Тоді область розміщення описується такою системою обмежень:

$$\begin{cases} \xi_i \geq 0, \\ \xi_i \leq a_i, i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

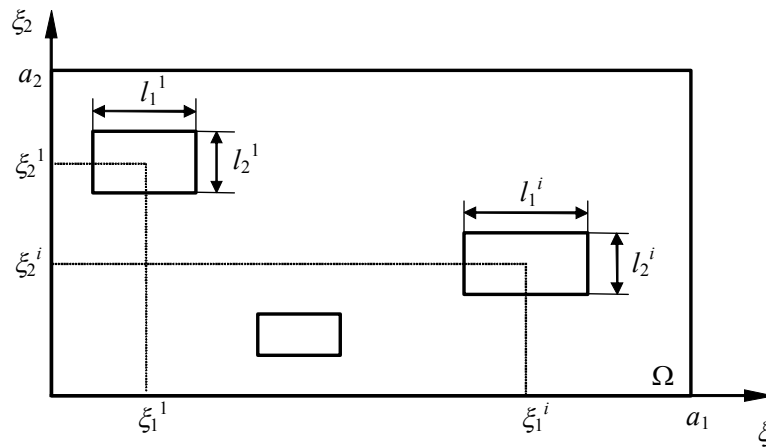


Рис. 1. Приклад розміщення прямокутників для двовимірного випадку

Мета. Множина припустимих розв'язків G поставленої задачі визначається:

1. Умовами взаємного неперетинання прямокутників є:

– для кожної пари D_s, D_p прямокутників існує хоча б одне $i \in \{1, \dots, n\}$ таке, що:

$$\left(\xi_i^s - \xi_i^p \geq \frac{l_i^s + l_i^p}{2} \right) \vee \left(\xi_i^p - \xi_i^s \geq \frac{l_i^s + l_i^p}{2} \right), s = 1, \dots, m-1; p = s+1, \dots, m. \tag{2}$$

2. Умовами належності прямокутників області розміщення Ω є:

– для кожного прямокутника D_j виконується:

$$\frac{l_i^j}{2} \leq \xi_i^j \leq a_i - \frac{l_i^j}{2}, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m. \tag{3}$$

Наведені обмеження (2), (3) описують множину, що є багатовимірною та має складну структуру. Вона

багатозв'язна, а також може бути незв'язною.

Використовуючи (2) та (3), множину припустимих розв'язків G можна представити у вигляді об'єднання підмножин G_k , кожна з яких є опуклою та описується системою лінійних нерівностей [2, 3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_i^s - \xi_i^p \leq \frac{l_i^s + l_i^p}{2}, \\ -\xi_i^j \leq \frac{l_i^j}{2}, \\ \xi_i^j \leq a_i - \frac{l_i^j}{2}, \end{array} \right. \vee \left\{ \begin{array}{l} \xi_i^p - \xi_i^s \leq \frac{l_i^s + l_i^p}{2}, \\ -\xi_i^j \leq \frac{l_i^j}{2}, \\ \xi_i^j \leq a_i - \frac{l_i^j}{2}, \end{array} \right. \begin{array}{l} s = 1, \dots, m-1, \\ p = s+1, \dots, m, \\ j = 1, \dots, m. \end{array}$$

Тобто виконується:

$$G = \bigcup_{k=1}^r G_k, \text{ де } r = (2n)^{C_m^2}.$$

Кількість обмежень, що задають кожну з підмножин G_k , залежить від кількості прямокутників m та вимірності простору n і становить:

$$N = C_m^2 + 2 \cdot n \cdot m. \tag{4}$$

Тобто, розв'язання задачі оптимізації розміщення прямокутників у прямокутній області можна замінити розв'язанням r підзадач оптимізації тієї ж функції цілі на кожній з підмножин G_k ($k = 1, 2, \dots, r$), що являють собою опуклі багатогранники:

$$f(Z) \rightarrow \text{extr}, Z \in G_k, k = 1, \dots, r. \tag{5}$$

Викладення основного матеріалу. Метод проекції градієнта Розена

До розв'язання кожної з задач (5) можна застосувати метод проекції градієнта Розена, який полягає у такому [4, 5]:

1. Для поточного наближення до розв'язку задачі x^k визначимо матрицю обмежень, активних у даному наближенні, A_1 .
2. Наступне наближення до розв'язку задачі x^{k+1} знаходиться за правилом:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_k d^k, d^k = P(-\nabla f(x^k)), \tag{5}$$

де P – матриця проектування на множину припустимих розв'язків, яка визначається таким чином:

$$P = E - A_1^T(A_1 A_1^T)^{-1} A_1. \tag{6}$$

Метод G-проекції

Для розв'язання задачі (5) було розроблено метод G-проекції, що враховує специфіку поставленої задачі. Основна ідея методу полягає в такому.

Розглянемо матрицю активних обмежень:

- рядки цієї матриці, що відповідають обмеженням (3), описують умови належності прямокутників області розміщення і містять $2 \cdot m - 1$ нульових елементів та один одиничний елемент з відповідним знаком. Номер стовпчика, що містить одиничний елемент, визначає координату вектора розміщення прямокутників, на яку накладена умова належності прямокутника області розміщення;
- рядки матриці активних обмежень, що відповідають обмеженням (2), описують умови неперетинання прямокутників і містять $2 \cdot m - 2$ нульових елементів та два одиничних елементи з протилежними знаками. Номери стовпчиків, що містять одиничні елементи визначають координати вектора розміщення прямокутників, на які накладені умови неперетинання прямокутників.

Розглянемо одночасно координати антиградієнта функції цілі в поточному наближенні та відповідні стовпчики матриці активних обмежень:

- якщо k -ий стовпчик матриці активних обмежень, окрім нульових елементів, містить хоча б один елемент, знак якого збігається зі знаком k -ої координати антиградієнта функції цілі, то обрана координата вважається «стримуваною» – вона обмежується, стримується іншою координатою;
- якщо k -ий стовпчик матриці активних обмежень, крім нульових елементів, містить хоча б один елемент, знак якого протилежний знакові k -ої координати антиградієнта функції цілі та попередня умова не виконується, то обрана координата вважається «стримуваною» – вона обмежує, стримує іншу координату;
- якщо k -ий стовпчик матриці активних обмежень нульовий, то обрана координата вважається «вільною», її зміна не виведе за множину припустимих розв'язків.

Очевидно, що для того щоб наступне наближення до розв'язку задачі оптимізації належало множині припустимих розв'язків цієї задачі, потрібно заборонити зміну «стримуваних» координат. Тобто, в векторі спуску «стримуваних» координат прирівнюються нулю. Інші співпадають з відповідними координатами антиградієнта.

Алгоритм методу G-проекції

1. Для поточного наближення до розв'язку задачі x^k визначається матриця A_1 – матриця обмежень,

активних в даному наближенні.

2. Наступне наближення до розв'язку задачі x^{k+1} знаходиться за правилом:

$$x^{k+1} = x^k + \beta_k d^k,$$

де d^k визначається таким чином:

- якщо A_1 для поточного наближення порожня, то покладемо $d^k = -\nabla f(x^k)$;
- інакше (якщо A_1 не порожня), то вектор спуска d^k будується за таким правилом.

Напочатку $d^k = -\nabla f(x^k)$ для кожної координати антиградієнта функції цілі ($i = 1, \dots, n^*m$) перевіряється відповідний стовпчик матриці A_1 .

– якщо s -ий ($s \in \{1, \dots, n \cdot m\}$) стовпчик матриці A_1 містить хоча б один одиничний елемент, знак якого збігається зі знаком антиградієнта функції цілі, то s -та координата вектора Z вважається «стримуваною» (тобто її зміну необхідно заборонити). У векторі спуску відповідна координата покладається рівною 0.

Планування статистичного експерименту

Для того, щоб зробити висновок про можливість використання обраних методів для розв'язання задачі оптимального розміщення прямокутників, необхідно оцінити порівняльну швидкість та точність методів.

Оскільки і побудований метод G-проекції, і класичний метод Розена є ітераційними методами, для яких важко передбачити необхідну кількість ітерацій для отримання стаціонарних точок, зробити такі оцінки можна засобами математичної статистики, шляхом проведення модельних експериментів [6].

Складемо план подальших статистичних експериментів. Оберемо основною метою плану:

- зменшення загального об'єму обчислень при збереженні вимог до достовірності та точності результатів;

- збільшення інформативності кожного окремого експерименту.

Пошук плану експерименту відбувається в так званому факторному просторі.

Факторний простір – це множина параметрів моделі, значення яких дослідник може контролювати під час проведення модельного експерименту.

Значення факторів зазвичай називається рівнями. Якщо під час проведення експерименту дослідник може змінювати рівень факторів, експеримент називається активним, в іншому випадку – пасивним.

План експерименту будується відносно одного основного скалярного параметра y , який називається «змінна, що вимірюється».

При цьому вважається, що значення змінної, яка вимірюється, отримується в ході експерименту та складається з двох елементів:

$$y = f(x) + e(x),$$

де $f(x)$ – функція відклику (невипадкова функція факторів); $e(x)$ – похибка експерименту; x – точка в факторному просторі (поєднання рівнів факторів).

Очевидно, що y є випадковою змінною, оскільки залежить від випадкової величини $e(x)$.

Дисперсія D_y змінної, що вимірюється, характеризує точність вимірювань та дорівнює дисперсії похибки експерименту $D_y = D_e$.

Таким чином, необхідно обрати такий план проведення модельних експериментів, при якому статистична оцінка функції відклику може бути отримана із заданою точністю при мінімальному об'ємі обчислень.

Параметри модельного статистичного експерименту для оцінки часової складності алгоритмів розв'язання задачі оптимізації:

1. Випадкова змінна y , що вимірюється, обрана як час розв'язання обраної задачі оптимізації.

2. Факторний простір експерименту включає в себе такий фактор, як кількість прямокутників для розміщення, рівень якого буде змінюватись під час проведення експериментів. Тому експеримент, що буде проводитись, є активним.

Тактичне планування статистичного експерименту

Сукупність методів встановлення необхідного об'єму випробувань відносять до тактичного планування експерименту.

Оскільки точність оцінок змінної, що вимірюється, характеризується її дисперсією, то основу тактичного планування експерименту складають методи зниження дисперсії.

При проведенні статистичного експерименту необхідно не тільки отримати достовірний результат, але й забезпечити його вимірювання із заданою точністю.

У загальному випадку об'єм випробувань (величина вибірки), необхідний для отримання оцінок змінної, що вимірюється, залежить від таких факторів:

- розподілу випадкової змінної y , що вимірюється;
- корельованості між собою елементів вибірки.

Але у випадку випадкової змінної y (час розв'язання обраної задачі оптимізації) ми не володіємо такою інформацією. Тому в нас залишається єдиний засіб підвищення точності оцінок значення величини

y , що вимірюється, – багатократне повторення випробувань для кожного поєднання рівнів обраних факторів (для кожної вимірності задачі оптимізації).

Такий підхід називається «формування простої випадкової вибірки» (ПВВ). При використанні ПВВ статистичний експеримент повторюється визначену кількість разів, потім отримані результати усереднюються (обчислюються математичне очікування та дисперсія змінної, що вимірюється).

Розглянемо один з основних варіантів обчислення необхідного об'єму випробувань N для отримання результатів із заданою точністю.

Кількість випробувань, що необхідно провести для того, щоб значення математичного очікування отриманих результатів y знаходилося б в інтервалі довіри $(y - b; y + b)$ з ймовірністю $(1 - \alpha)$, визначається за такою формулою:

$$N = \frac{Z^2 \cdot D_y}{b}, \tag{7}$$

де Z – значення щільності ймовірності нормального розподілу, що визначається залежно від обраного α ; D_y – дисперсія випадкової величини; $2b$ – довжина інтервалу довіри.

Якщо потрібне значення дисперсії D_y до початку експерименту невідомо, необхідно виконати пробну серію із L випробувань та розрахувати на основі цих випробувань вибіркочну дисперсію D .

$$D = \frac{1}{L-1} \sum_{i=1}^L (y_i - y_L)^2, \tag{8}$$

де y_L – вибіркоче середнє за результатами L випробувань.

Отримане значення D підставимо в (7) та розрахуємо попередню оцінку кількості випробувань N . Потім виконаємо $(N - L)$ випробувань, що залишилися.

Обробка отриманих результатів

За отриманими оцінками випадкової величини y , що вимірюється, (час розв'язання задачі оптимізації) необхідно побудувати часові складності алгоритмів, що використовувались.

Для побудови функціональної залежності за отриманим табличним записом скористаємося математичним апаратом апроксимації за методом найменших квадратів.

Нехай є послідовність із m точок:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{m-1}, y_{m-1}); \quad (x_i \neq x_j \text{ при } i \neq j, \quad i, j = 0 \dots m-1).$$

Серед функцій визначеного класу P необхідно знайти функцію $P(x)$, для якої величина (евклідова норма):

$$P = \sqrt{\sum_{i=0}^{m-1} (y_i - P(x_i))^2},$$

приймає найменше значення.

P – це лінійні комбінації деяких обраних функцій $g_j(x)$ ($j = 0 \dots n-1, n \leq$ якщо m), що називаються базисними, тобто:

$$P(x) = \sum_{j=0}^{n-1} c_j \cdot g_j(x).$$

Нехай A – матриця значень базисних функцій в абсцисах точок, y – вектор ординат цих точок, а c – вектор коефіцієнтів, що шукаються:

$$A = \begin{pmatrix} g_0(x_0) & g_1(x_0) & \dots & g_{n-1}(x_0) \\ g_0(x_1) & g_1(x_1) & \dots & g_{n-1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_0(x_{m-1}) & g_1(x_{m-1}) & \dots & g_{n-1}(x_{m-1}) \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{n-1} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Вектор c шукається як розв'язок матричного рівняння $A^T \cdot A \cdot c = A^T \cdot y$.

Оцінка часових складностей методів Розена і G-проекції

Було проведено чисельні експерименти, які дозволили побудувати статистичні оцінки математичного очікування часу розв'язання даної підзадачі оптимізації для обраної кількості прямокутників побудованим методом G-проекції та класичним методом Розена.

Параметри експериментів були обрані такими:

- b становить 5 % від розрахованого математичного очікування часу розв'язання задачі оптимізації для обраної кількості прямокутників;
- ймовірність достовірності результатів $(1 - \alpha)$ становить 98 %.

Чисельні експерименти проводилися таким чином для кожної кількості прямокутників:

1. Будувалась задача оптимізації розміщення для обраної кількості прямокутників з випадковими умовами (розмірами прямокутників та області розміщення, а також координатами фіксованої точки області). За функцію цілі обиралась сума квадратів відстаней від заданої точки області до полюсів

прямокутників.

2. Знаходилось припустиме початкове розміщення прямокутників та будувалась підмножина множини припустимих розв'язків, якій належало знайдене розміщення. Таким чином, будувалась підзадача для розв'язання.

3. Побудована підзадача розв'язувалась методом Розена, визначався час її розв'язання в мілісекундах.

4. Така ж сама підзадача розв'язувалась методом G-проекції, визначався час її розв'язання.

5. Пункти 1–4 повторювалися 50 разів.

6. За отриманими значеннями часу розв'язання підзадачі для обраної кількості прямокутників розраховувалися такі параметри:

а) математичне очікування часу розв'язання підзадачі;

б) інтервал довіри для розрахованого математичного очікування;

в) дисперсія часу розв'язання підзадачі;

г) необхідна кількість випробувань для отримання математичного очікування із заданою достовірністю у межах визначеного інтервалу довіри.

7. За формулою (7) перевірялось, чи було проведено достатньо випробувань для отримання значення математичного очікування часу розв'язання підзадачі оптимізації для обраної кількості прямокутників із заданою ймовірністю у межах визначеного інтервалу довіри, якщо ні, то проводились додаткові випробування.

8. Будувались оцінки часової складності методу G-проекції та методу Розена шляхом апроксимації за допомогою методу найменших квадратів.

Результати чисельних експериментів наведено у таблиці 1.

Таблиця 1

Характеристики методів Розена та G-проекції

Кількість прямокутників	3	4	5	6	7	8	9
1	2	3	4	5	6	7	8
Метод G-проекції							
Математичне очікування часу роботи алгоритму, мс	0,15240	0,17744	0,21330	0,26358	0,31712	0,43208	0,52118

Продовження табл. 1

1	2	3	4	5	6	7	8
Дисперсія часу роботи алгоритму	3,47347E-05	8,78433E-05	9,32755E-05	0,000170575	6,43118E-05	0,000164442	8,79465E-05
Побудований інтервал довіри	0,00762	0,008872	0,010665	0,013179	0,015856	0,021604	0,026059
Необхідна кількість експериментів	0,0949494	0,177134871	0,130162108	0,155879636	0,040601521	0,055922201	0,020556155
Метод Розена							
Математичне очікування часу роботи алгоритму, мс	4,89810	5,10550	5,36770	5,68430	6,13390	6,67650	7,43560
Дисперсія часу роботи алгоритму	0,0037984	0,01284923	0,00504307	0,01460001	0,01649417	0,04277577	0,26443637
Побудований інтервал довіри	0,244905	0,255275	0,268385	0,284215	0,306695	0,333825	0,37178
Необхідна кількість експериментів	0,0100530	0,031296758	0,011112641	0,028687839	0,027832731	0,060925448	0,303660146
Відношення швидкості роботи алгоритмів, %	3213,98	2877,31	2516,50	2156,57	1934,25	1545,20	1426,69
Кількість прямокутників	10	11	12	13	14	15	16

Метод G-проекції							
Математичне очікування часу роботи алгоритму, мс	0,62556	0,72053	0,84856	1,01874	1,22596	1,45930	1,77566
Дисперсія часу роботи алгоритму	0,0001106	0,00020788	0,00018797	0,00042962	0,00097730	0,002280418	0,00411333
Побудований інтервал довіри	0,0312781	0,03602641	0,042428	0,050937	0,061298	0,072965	0,088783
Необхідна кількість експериментів	0,0179484	0,02542258	0,01657342	0,02628218	0,04128345	0,067986709	0,08282714
Метод Розена							
Математичне очікування часу роботи алгоритму, мс	8,29270	9,18870	10,50460	11,53010	13,18010	15,19730	17,74650
Дисперсія часу роботи алгоритму	0,2070594	0,35514062	0,72796820	0,54336887	0,48340152	0,59369307	0,88762168
Побудований інтервал довіри	0,414635	0,459435	0,52523	0,576505	0,659005	0,759865	0,887325
Необхідна кількість експериментів	0,1911620	0,26704894	0,418843733	0,25949396	0,17667262	0,163202857	0,17893740
Відношення швидкості роботи алгоритмів, %	1325,64	1275,27	1237,93	1131,80	1075,08	1041,41	999,43

Часова складність методу G-проекції

За отриманими результатами було надано практичну оцінку часової складності розв’язання підзадачі оптимізації методом G-проекції. Для побудови часової складності було використано апроксимацію за допомогою методу найменших квадратів.

Отримана часова складність виявилася поліномом третього ступеня такого вигляду:

$$T(m) = 5,667664e - 4 \cdot m^3 - 6,698687e - 3 \cdot m^2 + 0,074347 \cdot m - 0,044773 .$$

Одиницею виміру часу розв’язання обраної підзадачі оптимізації є мілісекунди.

Квадратичне відхилення побудованого поліному від табличних результатів становить $Q = 0,836$.

Побудована часова складність наведена на рисунку 2.

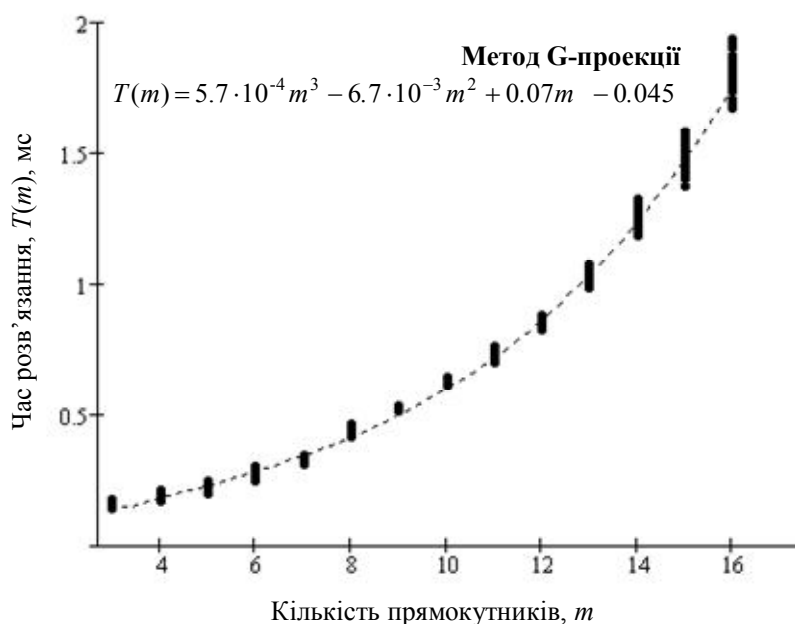


Рис. 2. Часова складність методу G-проекції

Часова складність методу Розена

За отриманими результатами було надано практичну оцінку часової складності розв’язання підзадачі

оптимізації методом Розена. Для побудови часової складності було використано апроксимацію за допомогою методу найменших квадратів.

Отримана часова складність виявилася поліномом п'ятого ступеня такого вигляду

$$T(m) = 1,050076e - 4 \cdot m^5 - 4,453569e - 3 \cdot m^4 + 0,073336 \cdot m^3 - 0,518937 \cdot m^2 + 1,851118 \cdot m - 2,363549.$$

Одиницею виміру часу розв'язання обраної підзадачі оптимізації є мілісекунди.

Квадратичне відхилення побудованого полінома від табличних результатів становить $Q = 14,347$.

Побудована часова складність наведена на рисунку 3.

Порівняння часових складностей методу G-проекції та методу Розена

Часова складність знаходження розв'язку обраної підзадачі оптимізації методом G-проекції виявилась третього ступеня.

Часова складність знаходження розв'язку обраної підзадачі оптимізації методом Розена є поліномом п'ятого ступеня.

На рисунку 4 наведено порівняння отриманих часових складностей.

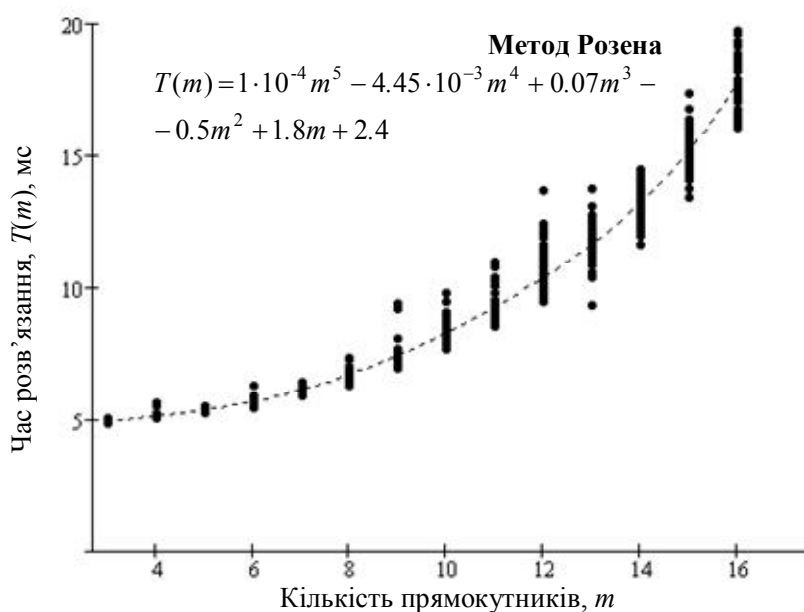


Рис. 3. Часова складність методу Розена

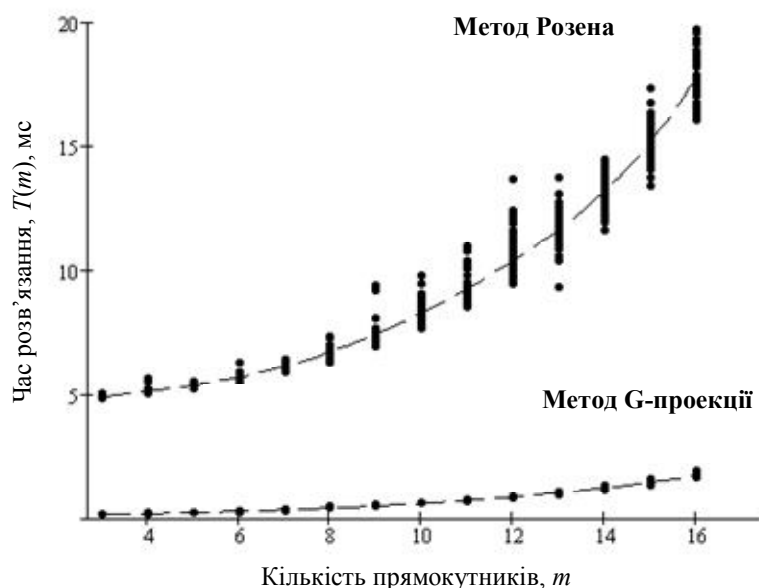


Рис. 4. Часові складності методів G-проекції та Розена

Відношення швидкості роботи методу G-проекції до швидкості роботи методу Розена

За експериментальними даними, наведеними в таблиці 1, побудована крива (рис. 5), що описує відношення швидкості роботи методу G-проекції до швидкості роботи методу Розена залежно від кількості прямокутників. За табличним записом побудовано аналітичний вигляд інтерполяційної функції, що описує відношення швидкостей роботи методів залежно від кількості прямокутників.

За отриманою інтерполяційною функцією бачимо, що за допомогою методу G-проекції розв'язки обраної підзадачі оптимізації отримуються в декілька разів швидше, ніж за допомогою методу Розена.

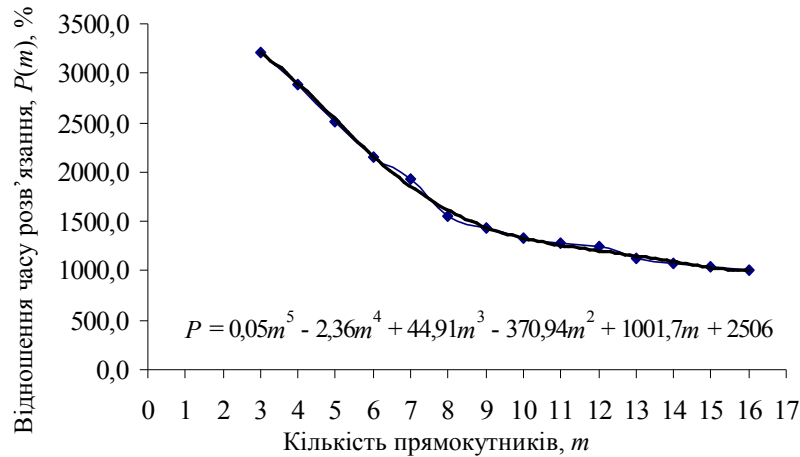


Рис. 5. Відношення швидкостей роботи методів G-проекції та Розена

Висновок. Таким чином, з аналізу отриманих оцінок для часових складностей випливає, що методом G-проекції розв'язок обраної підзадачі оптимізації знаходиться за значно менший проміжок часу, ніж методом Розена, тобто для розв'язання підзадачі оптимізації розміщення прямокутників метод G-проекції є швидшим, ніж метод проекції градієнта Розена.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Стоян Ю.Г. Размещение источников физических полей / Ю.Г. Стоян, В.П. Пулятин. – К. : Наук. думка, 1981. – 186 с.
2. Оптимізація розміщення джерел фізичного поля модифікованим методом Розена / Д.О. Жовновський, Л.В. Рудюк, К.Є. Саваневич та ін. // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – 2000. – № 13. – С. 188–191.
3. Yaremchuk S.I. Practical solution of the problem of rectangular physical field sources arrangement in rectangle / S.I. Yaremchuk, L.V. Rudyuk // Proceedings of the Fifth international scientific conference “electronic, Computers and Informatics” 2002, October 10–11. – 2002 Kosice–Herl’any, Slovakia.
4. Rosen J.B. “The gradient projection method for nonlinear programming. Part I, Linear Constraints,” / J.B. Rosen // SIAM J. Applied Mathematics 8. – 1960. – Pp. 181–217.
5. Rosen J.B. “The gradient projection method for nonlinear programming. Part II, Linear Constraints,” / J.B. Rosen // SIAM J. Applied Mathematics 9. – 1961. – Pp. 514–553.
6. Гультяев А. Имитационное моделирование в среде Windows / А.Гультяев. – С.Пб. : Корона принт. – 1999. – 287 с.

ВДАІ×ОЕ Ñâ³œëíà ²âáí³âíà – êáíãëãàð ð³çëëí-íàðâáíàðë÷íëð íàóë, професор êâðããðë òðíàðáííâí çâáâçíâ÷âíý íà÷ëëðâáëüíí; ðâðí³ëë Æëòíèððüëíâí ðåðæàâíðîòåõíîãî ùíâåðñíòåòó.

Íàòëíâ³ ³òàððâñë:

- âëñððâíâëüí³ çâáâ÷³;
- íàðâáíàðë÷íâ íââëðâáíý.

РУДЮК Лідія Василівна – êáíãëãàð ð³çëëí-íàðâáíàðë÷íëð íàóë, доцент êâðããðë òðíàðáííâí çâáâçíâ÷âíý íà÷ëëðâáëüíí; ðâðí³ëë Æëòíèððüëíâí ðåðæàâíðîòåõíîãî ùíâåðñíòåòó.

Íàòëíâ³ ³òàððâñë:

- íàðâáíâ òðëí³çàð³;
- êíí³ðòàðâíâ íââëðâáíý.

Подано 27.05.2011

