***Гніліцький В.В., к.т.н., доцент,***
*Житомирський державний технологічний університет*

# РОЗПОДІЛ ВАГ ДВІЙКОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ НА ГІПЕРСФЕРАХ НАВКОЛО КОДОВИХ КОМБІНАЦІЙ ЗАВАДОСТІЙКИХ КОДІВ

Розподіл або спектр $A(w)$ ваг $w$ кодових комбінацій завадостійкого групового коду є важливою характеристикою такого коду. Наприклад, знання $A(w)$ коду дозволяє отримати аналітичні вирази для розрахунку точних (в межах похибки обчислень) значень ймовірнісних характеристик передачі повідомлень завадостійким кодом через двійковий стаціонарний симетричний канал без пам'яті.

В деяких випадках бажано знати розподіл вагів двійкових послідовностей, розташованих на гіперсферах навколо кодових комбінацій завадостійкого коду. Гіперсфера радіусу $R$ навколо кодової комбінації $\boldsymbol{a_i}$ це множина всіх двійкових послідовностей, відстань до яких від $\boldsymbol{a_i}$ за метрикою Хеммінга дорівнює $R$.

Нехай деяка кодова комбінація $\boldsymbol{a_i}$ коду довжиною $n$ має вагу $w$. Тоді в гіперсфері з радіусом $R = 1$, яка складається із двійкових послідовностей, відстань Хеммінга $d$ яких від $\boldsymbol{a_i}$ дорівнює одиниці, буде $w$ послідовностей ваги $w-1$ (всі варіанти заміни одного двійкового символу “1” в комбінації $\boldsymbol{a_i}$ на символ “0”) та $n-w$ послідовностей ваги $w+1$ (всі варіанти заміни одного двійкового символу “0” в комбінації $\boldsymbol{a_i}$ на символ “1”).

Позначимо через $B_R(m)$, $m = 0,1,2,\ldots,n$ спектр послідовності на гіперсфері на гіперсфері радіусу $R$. Тоді для випадку, що розглядався вище ($R = 1$), спектр буде мати тільки дві складові, які відрізняються від нуля, а саме: $B_1(w-1) = w$ та $B_1(w+1) = n-w$. Звісно, кількість двійкових послідовностей на гіперсфері радіусу $R = 1$ дорівнює $B_1(w-1) + B_1(w+1) =$
$= w + n - w = n$.

Гіперсфера радіусу $R = 2$ навколо комбінації $\boldsymbol{a_i}$ з вагою $w$ буде складатися з таких послідовностей:

1) послідовності з вагою $w-2$; це такі, що утворюються заміною в $\boldsymbol{a_i}$ будь-яких двох символів “1” на символи “0”; їх кількість дорівнює $B_2(w-2) = C_w^2$ ;
2) послідовності з вагою $w+2$, вони утворюються заміною в $\boldsymbol{a_i}$ будь-яких двох символів “0” на символи “1”; їх кількість дорівнює $B_2(w+2) = C_{n-w}^2$ ;
3) послідовності з вагою $w$, вони утворюються при заміні в $\boldsymbol{a_i}$ будь-якого символу “0” на символ “1”; та одночасно при заміні будь-якого символу “1” на символ “0”; їх кількість дорівнює $B_2(w) = C_w^1 \cdot C_{n-w}^1$ .

Позначимо через $\alpha$ кількість символів “0”, що змінилися на символи “1” в комбінації $\boldsymbol{a_i}$ з вагою $w$, внаслідок чого утворилась послідовність, яка розташована на на гіперсфері радіусу $R$ навколо $\boldsymbol{a_i}$; звісно, що $0 \le \alpha \le R$. Тоді із $w$ двійкових символів “1” в $\boldsymbol{a_i}$ мають змінитися $R-\alpha$ на символи “0”. Вага $m$ отриманної послідовності буде дорівнювати

$$m = w + (\alpha - R) - \alpha = w + 2\alpha - R, \qquad (1)$$

а кількість $B_R(m)$ двійкових послідовностей з вагою $m$ в гіперсфері радіусу $R$ навколо комбінації довжиною $n$ та вагою $w$ визначається виразом

$$B_R(w) = C_w^{R-\alpha} \cdot C_{n-w}^{\alpha} .$$

Як виходить із (1), різниця $\Delta$ між вагою $m$ послідовності на гіперсфері та вагою $w$ комбінації, навколо якої побудована ця гіперсфера, не залежить від довжини комбінації і дорівнює

$$\Delta = m - w = 2\alpha - R.$$

Надаючи $\alpha$ значення $0,1,\ldots,R$, можна отримати спектр $B_R(w)$ вагів послідовностей, розташованих на гіперсфері радіусу $R$.