Панішев А.В., д.т.н., професор,
Кушнір Н.О., аспірант,
Житомирський державний технологічний університет

ЗВЕДЕННЯ ЗАДАЧІ ЗНАХОДЖЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ПАРОСПОЛУЧЕННЯ У ДОВІЛЬНОМУ ГРАФІ ДО ДВОДОЛЬНОГО ВИПАДКУ

Підмножина ребер графу, що не мають спільних вершин, називається паросполученням M. Задача про паросполучення (ЗП) полягає в знаходженні в даному графі $H=(V,U)$, де V – множина вершин, U – множина ребер, паросполучення $M_{\max}$ максимальної потужності (максимального паросполучення). ЗП є окремим випадком задачі про зважене паросполучення, в якому кожне ребро $\{v_i,v_j\}\in U$ має одиничну вагу.

Приналежність ЗП класу ефективно розв'язуваних проблем встановив Едмондс, побудувавши алгоритм її розв'язання з часовою оцінкою складності $O\ n^4$, $|V|=n,$ при використанні трудомісткої техніки стиснення певних непарних циклів-квіток. Інші відомі алгоритми знаходження $M_{\max}$ відрізняються від алгоритму Едмондса тільки більш досконалою організацією пам'яті й обчислень, зберігаючи непрості дії з виявлення й зрізання квіток.

Квітками називаються прості цикли з $2k+1$ вершинами, що містять k ребер паросполучення. Оскільки квітка-цикл непарної довжини, то він не міститься в дводольному графі, для якого задача знаходження максимального паросполучення істотно спрощується. Крім того, квітка в довільному графі H визначається стосовно деякого фіксованого паросполучення M як підграф з максимальною щільністю ребер, що утворюють підмножину $M^{'}\subseteq M$. Вочевидь, чим менша потужність паросполучення, з якого розпочинаються дії по її збільшенню, тим менше квіток міститься в H. Якщо $|M|=1$, то в H або немає квіток, або всі квітки-цикли з трьома вершинами і загальним ребром паросполучення M (бутони).

Пропонується задачу знаходження максимального паросполучення в довільному графі $H=(V,U)$ звести до дводольного випадку. Дводольний граф $D=(X,Y,E)$, в якому X і Y – множина вершин, $|X|=|Y|=n$, E – множина ребер, $(i,j)\in E$, якщо $(v_i,v_j)\in U, i\neq j,\ \ i,j\in\{1,2,...,n\}, |E|=2|U|$, має більш просту структуру.

Позначимо $[h_{ij}]_n$ і $[d_{ij}]_n$ – матриці суміжності відповідно графів H і $D: h_{ij}=1$, якщо в H вершина v_i суміжна з вершиною v_j і $h_{ij}=0$ інакше; $d_{ij}=1$, якщо в D вершина $i\in X$ суміжна з вершиною $j\in Y$ і $d_{ij}=0$ інакше. Зі співпадіння матриць $[h_{ij}]_n$ і $[d_{ij}]_n$ випливає, що якщо побудований розв'язок ЗП для D, то він побудований і для H.

Дана робота базується на розвитку ідеї пошуку в ширину в дводольних графах і основних визначеннях теорії паросполучень.

Доведене твердження, що кожному поточному паросполученню $M\subset U$ в довільному графі H взаємно однозначно відповідає паросполучення $M(D)$ в дводольному графі D.

Із доказу цього твердження випливає, що жодний із поточних розв'язків M в довільному графі H не втрачається при переході до ітераційної схеми побудови $M_{\max}(D)$ в дводольному графі D.

Запропонована і детально описана процедура ШЛЯХ для знаходження шляху $P_{i_{k+1}}$ в підграфі $D_{i_{k+1}}$. Вона є модифікацією відомого алгоритму знаходження шляхів із даної вершини в усі досяжні вершини довільного графу H.

Доведене твердження, що процедура ШЛЯХ коректно будує в підграфі $D_{i_{k+1}}$ збільшуючий шлях $P_{i_{k+1}}$ щодо фіксованого паросполучення потужності $k+1$ за час $O(k)$.

На підставі вищевикладеного запропонований алгоритм знаходження у довільному графі $H=(V,U)$ максимального паросполучення $M_{\max}$. Розв'язок $M_{\max}$ взаємно однозначно відповідає максимальному паросполученню $M_k(D)=\{[i_l,j_l]\,|\,i_l\neq j_l, l=\overline{1,k}\}$ дводольного графу $D=(X,Y,E),$ в якому X,Y – множини вершин, $|X|=|Y|=n\geq 4, E$ – множина ребер, $\{i,j\}\in E,$ якщо $\{v_i,v_j\}\in U, i\neq j, i,j\in\{1,2,...,n\}, |E|=2|U|$.

Доведено, що максимальне паросполучення в довільному n-вершинному графі H коректно знаходиться за час $O(n^2)$.

Оцінено часову складність запропонованого алгоритму.