УДК 629.7:001.57.001.63

П.В. Фриз, к.т.н., проф.
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова
Національного авіаційного університету

СИСТЕМАТИЗОВАНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ ДЛЯ РОЗРАХУНКІВ РОЗМІРІВ КОНТРОЛЬОВАНИХ ДІЛЯНОК ЗЕМНОЇ ПОВЕРХНІ ПРИ КОСМІЧНИХ СПОСТЕРЕЖЕННЯХ КОНІЧНОЮ ЗОНОЮ ОГЛЯДУ В НАДИР

У статті запропоновано систематизований математичний апарат для розрахунку розмірів контрольованої ділянки земної поверхні за допомогою космічних апаратів (КА) дистанційного зондування Землі (ДЗЗ) з урахуванням кривизни Землі, орбітальних параметрів КА та технічних характеристик бортової цільової апаратури (БЦА) оптико-електронного типу з конічною зоною огляду при її орієнтації в надир. При цьому оцінено похибки у результатах, отриманих за спрощеними формулами, порівняно з формулами для сферичної моделі Землі, та запропоновано критерії вибору між цими формулами. Розроблений математичний апарат дає змогу розраховувати розміри контрольованої ділянки земної поверхні з точністю, достатньою для вирішення практичних завдань ДЗЗ.

Постановка проблеми. В епоху інтенсивного застосування космічних технологій в різних сферах людської діяльності, зокрема, в задачах ДЗЗ, часто виникають потреби у створенні власних космічних систем спостереження (КСС) або у використанні інформації від діючих іноземних КА, доступних за певних умов для вітчизняних користувачів [1, 2]. При цьому як у першому, так і в другому випадках одним із критеріїв вибору придатних для певних цільових задач КА є їх просторово-часове положення як у космічному просторі, так і відносно заданих наземних об'єктів (НО) спостереження [3].

Зокрема в задачах ДЗЗ за допомогою БЦА оптико-електронного спостереження (ОЕСп) однією із умов успішного виконання завдань є наявність геометричної видимості між КА і заданими НО. У цьому випадку зазначені об'єкти повністю або частково потраплять у деякий момент часу в зону огляду БЦА або "накриватимуться" смугою огляду чи смугою захоплення КА на заданому інтервалі спостережень [4]. Розміри і положення фактично відзнятої ділянки земної поверхні відносно заданого НО можуть виступати одним із показників цільової ефективності КСС [5]. В свою чергу, точність визначення розмірів і положення спостережуваної ділянки однозначно залежить від точності розрахунків розміру площі проекції зони огляду БЦА КА на Землю.

На практиці, зазвичай, у завданнях спостережень НО розраховують лінійні розміри та площу проекції зони огляду КА, виходячи із *плоскої* моделі Землі. Але такий підхід є прийнятним лише для завдань *детального* спостереження, коли застосовують БЦА з малими кутами поля зору $\chi \approx 0{,}5...8^\circ$ та майже колові низькі орбіти з висотами $Í_i \approx 600...1000$ км.

В завданнях же *оглядового* спостереження НО, коли застосовують БЦА з великими кутами поля зору $\chi \geq 10^\circ$, за рахунок кривизни Землі змінюються розміри і форма проекції зони огляду та її положення на Землі, що призводить до геометричних спотворень космічних знімків [6, 7].

У зв'язку з цим виникає **актуальне завдання** підвищення точності розрахунків розмірів контрольованої ділянки поверхні Землі при створенні власних КСС або виборі іноземних КА, придатних для спостереження заданих НО, з урахуванням кривизни Землі, орбітальних параметрів та технічних характеристик БЦА оптико-електронного типу, яка формує, зокрема, конічну зону огляду та орієнтує її в надир. Такі розрахунки необхідні як на етапі планування космічної зйомки, так і на етапі оцінювання її результатів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питання розрахунку розмірів контрольованих ділянок земної поверхні тією чи іншою мірою розглядаються в ряді наукових праць останнього часу [8–12], але в них представлено тільки окремі показники або підходи.

Зокрема у статті [8] наведено підхід до планування спостережень з урахуванням геометричної форми заданої області земної поверхні, а також її розташування відносно траси КА та смуги огляду БЦА. Але математичний апарат для розрахунків параметрів проекції зони огляду на Землю не наведено.

У роботі [9] запропоновано алгоритм розрахунку площі контрольованої частини заданого району та обчислення коефіцієнта накриття зоною огляду цього району. При цьому введено припущення, що розміри району невеликі і через це його межі можна задавати плоскою трапецією.

У публікації [10] розроблено методику, що дозволяє оцінювати потенційні варіанти космічного знімання заданого району за різними показниками, враховуючи і площу цього району, але власне ні його лінійні розміри, ні площа не розраховуються, а використовується відносний показник – коефіцієнт накриття.

 © П.В. Фриз, 2012

Стаття [11] присвячена тільки одному боку проблеми – оцінюванню висоти об'єктів за розмірами їх тіней на космічних знімках, а стаття [12] – проблемі розрахунків контрольованої площі за допомогою діаграм спрямованості передавальних антен штучних супутників Землі.

Виходячи з цього, **метою** статті є систематизація та вдосконалення математичного апарата для розрахунків розмірів контрольованої ділянки земної поверхні при ОЕСп заданих НО конічною зоною огляду БЦА при її орієнтації в надир. В подальшому передбачається розробка серії таких статей, в яких досліджуватимуться інші ситуації.

Викладення основного матеріалу. КА ОЕСп сприймають оптичне випромінювання НО в межах зони огляду. При цьому під *зоною огляду* КА розумітимемо [4] частину простору, обмежену відносно *нерухомого* КА за дальністю, його висотою H над поверхнею Землі, а за кутами – його полем зору.

Поле зору КА, як правило, формується за рахунок технічних характеристик і геометричних параметрів БЦА. Якщо БЦА встановлена на КА нерухомо, а її візирна вісь співпадає з головною віссю симетрії КА, то поля зору БЦА і КА, а також їх зони огляду є поняттями тотожними.

Зона огляду зазвичай характеризує просторові можливості КА по спостереженню за наземними об'єктами. На основі параметрів зони огляду визначають: а) лінійні розміри проекції зони огляду на поверхні Землі L_* або $L_\alpha \times L_\beta$; б) ширину його смуги $L_{огл}$; в) площу проекції на поверхні Землі $S_{огл}$; г) площу знятої сцени $S_{сц}$ та ін.

Прикладом *лінійних розмірів* прямокутної проекції зони огляду на поверхні Землі можуть служити її ширина L_α та довжина L_β (рис. 1, *а*). Якщо проекція еліптична, то її можна характеризувати великою L_α та малою L_β осями еліпса. Лінійним розміром кола служить його діаметр L_*.

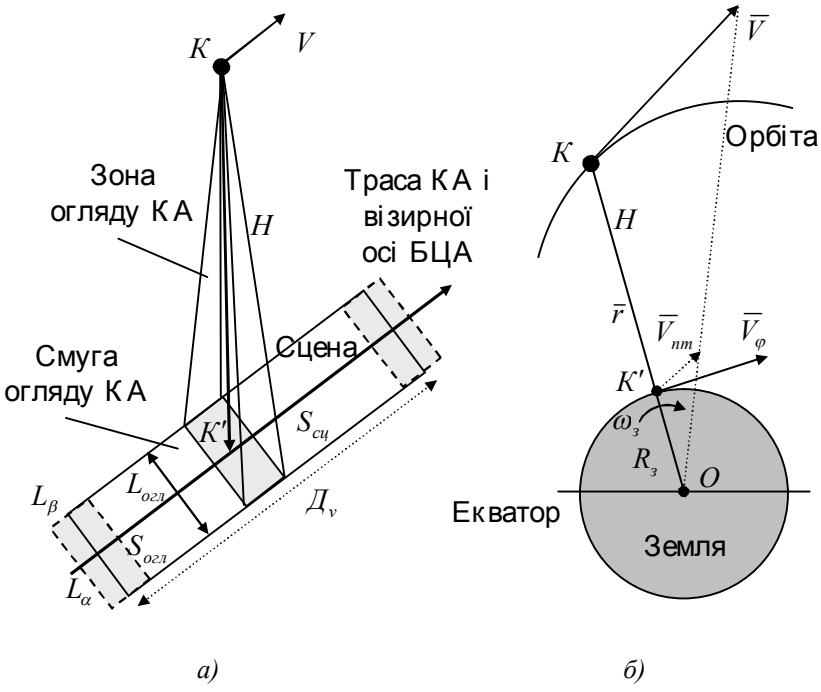


Рис. 1. До поняття смуги огляду і сцени (а) та підсупутникової точки (б)

Смуга огляду утворюється за рахунок *поступального* руху КА (рис. 1, *а*). Вона є частиною поверхні Землі, що накривається проекцією зони огляду КА на Землю за його фіксованим кутовим положенням. Інакше кажучи, це слід поля зору КА на Землі. При цьому, як видно із прикладу (рис. 1, *а*), ширина смуги огляду $L_{огл} = L_\alpha$.

Знята сцена – це частина смуги огляду КА, що обмежена шириною його смуги $L_{огл}$ та довжиною спостережуваної ділянки $Д_v$, яка утворюється за рахунок орбітального руху КА з лінійною швидкістю V за час спостереження

$$\Delta t_{сп} = t_к - t_п, \tag{1}$$

де $t_п$ і $t_к$ – моменти початку і кінця спостереження відповідно.

Зазначимо, що в задачах ДЗЗ час спостереження за окремими районами або об'єктами займає, як правило, від десятків секунд до декількох хвилин. Виходячи з цього, в межах даного дослідження

вважатимемо, що кутова швидкість обертання Землі навколо своєї осі $\omega_з \approx 0$. Крім того, вважатимемо, що Земля має сферичну форму, а її середній радіус $R_ç = 6371$ км.

Тоді *площу знятої сцени* (рис. 1, *а*) можна знайти як [4]:

$$S_{сц} = S_{огл} + L_{огл}\, Д_v . \tag{2}$$

У цій формулі довжина знятої сцени $Д_v$ у загальному випадку може бути знайдена через лінійну швидкість підсупутникової точки (ПТ) $V_{пт}(t) = V_{пт}$ як:

$$Д_v = \int_{t_п}^{t_к} V_{пт} d\,t . \tag{3}$$

Підсупутникова точка – це точка K' на земній поверхні (рис. 1, *б*), з якої КА в даний момент часу видно у зеніті. Іншими словами – це точка перетинання поточного радіуса-вектора КА $\bar{r}(t)$ з поверхнею Землі. Множина ПТ є трасою КА, а у нашому випадку – і трасою візирної осі БЦА.

Оскільки за визначенням КА і його ПТ (точки K і K' на рисунку 1, *б*) лежать на одній прямій, то вони обертаються навколо центра Землі O з однією і тією ж кутовою швидкістю:

$$\omega_* = \frac{V}{R_ç + H} = \frac{V_{їò}}{R_ç}, \tag{4}$$

де $V = V(t)$ – поточна лінійна швидкість КА; $H = H(t)$ – поточна висота КА над поверхнею Землі.

Як видно із формули (4), лінійна швидкість ПТ залежить від лінійної швидкості КА та висоти його орбіти і її величину можна оцінити як:

$$V_{пт} = \frac{R_з}{R_з + H} V . \tag{5}$$

У свою чергу, лінійна швидкість КА залежить від розмірів і форми орбіти й поточного положення КА на ній і у загальному випадку обчислюється за формулою [4]:

$$V = \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \tag{6}$$

де $\mu_0 = 3{,}986 \cdot 10^5$ км^3/с^2 – гравітаційний параметр Землі; $r = r(t) = H + R_з$ – поточна довжина радіуса-вектора КА; $a = 0{,}5\left(H_A + H_П + 2R_з\right)$ – велика піввісь еліптичної орбіти; H_A і $H_П$ – висота апогею і перигею еліптичної орбіти над Землею.

З урахуванням отриманих результатів із формули (2) знайдемо кінцевий вираз для розрахунків площі знятої сцени:

$$S_{сц} = S_{огл} + L_{огл} \int_{t_п}^{t_к} \frac{R_з}{R_з + H} \sqrt{\mu_0 \left(\frac{2}{R_з + H} + \frac{1}{a} \right)} dt . \tag{7}$$

Якщо для спостережень застосовують колові або майже колові орбіти, то $H \approx H_A \approx H_П \approx H_o$, $r = r_o$, $a = H_o + R_з = r_o$ і формула (6) спрощується до вигляду:

$$V \approx V_o = \sqrt{\mu_0 / r_o} \approx \text{const}. \tag{8}$$

Тоді вираз (5) набуде вигляду:

$$V_{пто} = \frac{R_з}{R_з + H_o} V_o . \tag{9}$$

У цьому випадку для розрахунків довжини знятої сцени замість виразу (3) можна скористатись спрощеною формулою:

$$Д_{vo} \approx V_{пто} \Delta t_{сп} . \tag{10}$$

З урахуванням отриманих результатів із формули (2) знайдемо кінцевий вираз для розрахунків площі знятої сцени з колових або майже колових орбіт:

$$S_{сцо} \approx S_{огл} + \frac{R_з \sqrt{\mu_0 / \left(R_з + H_o\right)}}{R_з + H_o} \Delta t_{сп} . \tag{11}$$

В задачах спостереження Землі із космосу слід розглядати множину ситуацій, які можуть виникати залежно від обраної моделі спостережуваної поверхні, форми зони огляду КА та її орієнтації відносно надира (табл. 1).

Таблиця 1

Варіант позначень ситуацій в задачах ДЗЗ

Поверхня Землі (III)	Форма зони огляду (I)					
	конічна (1)			пірамідальна (2)		
	Орієнтація зони огляду (II)			Орієнтація зони огляду (II)		
	в надир (1)	крен (2)	тангаж (3)	в надир (1)	крен (2)	тангаж (3)
Плоска (1)	Ξ_{111}	Ξ_{121}	Ξ_{131}	Ξ_{211}	Ξ_{221}	Ξ_{231}
Сферична (2)	Ξ_{112}	Ξ_{122}	Ξ_{132}	Ξ_{212}	Ξ_{222}	Ξ_{232}
Еліпсоїдальна (3)	Ξ_{113}	Ξ_{123}	Ξ_{133}	Ξ_{213}	Ξ_{223}	Ξ_{233}

Виходячи з цього, за необхідності для однозначності записів можна використовувати систему позначень *ситуацій* у вигляді Ξ_{***}, представлену в таблиці 1. Наприклад, L_{111} – лінійний розмір проекції зони огляду на поверхні плоскої Землі; $L_{огл}(\Xi_{111})$ – ширина його смуги на поверхні плоскої Землі; $S_{111} = S_{огл}(\Xi_{111})$ − площа проекції *конічної* зони огляду при спостереженнях в *надир* на *плоскій* поверхні Землі тощо.

У випадку *конічної* зони огляду кутове поле зору БЦА можна характеризувати (рис. 2) плоским 2χ або тілесним кутом ϕ при вершині конічної поверхні. Математичний вираз для обчислення тілесного кута має вигляд (рис. 2, *а*) $\phi = S/R^2$. Він пов'язаний із плоским кутом 2χ при вершині конуса залежністю [13]:

$$\phi = 2\pi(1-\cos\chi). \tag{12}$$

При малих плоских кутах ($\chi \le 15...20^\circ$) $\phi \approx 0{,}25\pi(2\chi)^2$, де кут χ береться в радіанах.

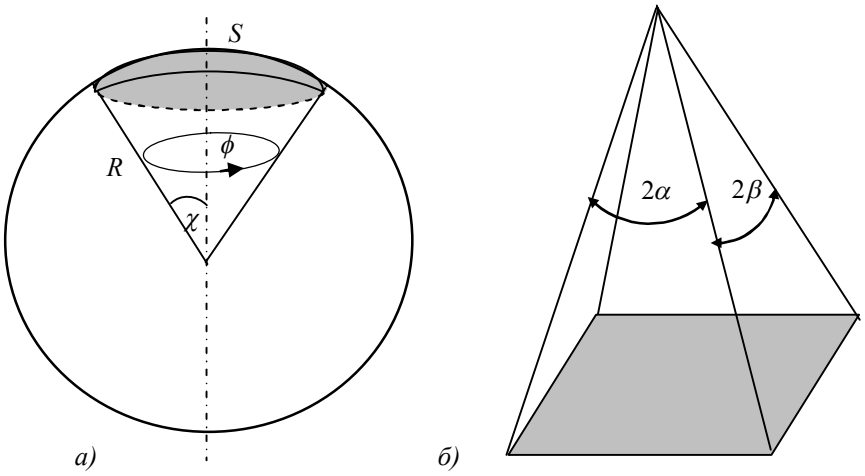


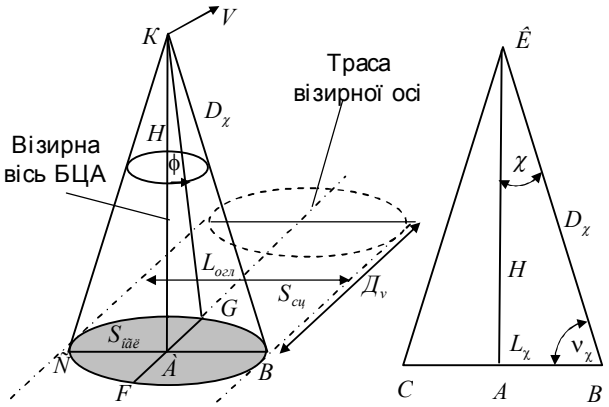
Рис. 2. До визначення тілесного кута

Якщо тілесний кут має форму прямокутної піраміди (рис. 2, *б*), кути між гранями якої відповідно рівні 2α x 2β, то величину тілесного кута знаходять за формулою:

$$\varpi = 2\alpha \times 2\beta = 4\alpha\beta\ . \tag{13}$$

Розглянемо окремі характерні ситуації для *плоскої і сферичної моделей* Землі, надані в таблиці 1 для конічної зони огляду.

Ситуація Ξ_{111} (конус, надир, плоска поверхня Землі). Приймемо, що зона огляду КА є *прямим коловим конусом* $СКВ$ з кутом при вершині 2χ, візирна вісь БЦА співпадає з висотою цього конуса і направлена в *надир* (рис. 3). КА знаходиться на висоті $Í$. У цьому випадку проекція зони огляду на поверхні плоскої Землі є *колом*.



а) *б)*

Рис. 3. До ситуації спостережень в надир плоскої Землі конічною зоною огляду КА

Необхідно розрахувати: а) лінійні розміри проекції зони огляду L_{111}; б) ширину смуги огляду $L_{їäë}(\Xi_{111})$; в) площу проекції його зони $S_{огл}(\Xi_{111})$; г) площу сцени $S_{сц}(\Xi_{111})$, яку зніме КА за час спостереження $\Delta t_{сп}$.

Лінійні розміри проекції зони огляду на поверхні плоскої Землі можна характеризувати діаметром основи колового конуса $CGBF$ (рис. 3, *а*):

$$L_{111} = CB = FG = 2AB = 2AC = 2AF = 2AG = 2L_\chi, \tag{14}$$

де L_χ – довжина катета прямокутного трикутника *KAB*, яку можна знайти як (рис. 3, *б*):

$$L_\chi = \grave{A}\hat{A} = \grave{A}\tilde{N} = AF = AG = H\mathrm{tg}\chi = H\mathrm{ctg}\nu_\chi = D_\chi \sin\chi = D_\chi \cos\nu_\chi, \tag{15}$$

де $\nu_\chi = \nu(\chi) = 0{,}5\pi - \chi$ – кут візування земної поверхні; $D_\chi = D(\chi, H) = H/\cos\chi$ – максимальна дальність від КА до поверхні Землі в межах зони огляду.

Отримані значення лінійного розміру проекції зони огляду (14) і (15) є *шириною смуги огляду:*

$$L_{огл}(\Xi_{111}) = 2L_\chi. \tag{16}$$

При малих кутах поля зору БЦА для розрахунків лінійних розмірів проекції зони огляду можна замість формули (14) користуватись наближеними формулами:

$$L_\chi \approx H\chi \approx D_\chi\chi, \quad H \approx D_\chi. \tag{17}$$

Для знаходження площі проекції зони огляду на плоскій поверхні Землі скористаємось формулою [14] для розрахунків площі кола $CGBF$ (рис. 3), прийнявши за його радіус значення L_χ із виразів (15) або (17):

$$S_{111} = S_{огл}(\Xi_{111}) = \pi L_\chi^2. \tag{18}$$

Площу знятої сцени $S_{сц}(\Xi_{111})$ за час спостереження $\Delta t_{сп}$ можна обчислювати за формулами (7) або (11) з використанням виразів (16) та (18).

Ситуація Ξ_{112} (конус, надир, сферична поверхня Землі). Приймемо, що зона огляду КА є *прямим коловим конусом* CKB з кутом при вершині 2χ, візирна вісь БЦА співпадає з висотою цього конуса і направлена в *надир* (рис. 5). КА знаходиться на висоті H. У цьому випадку проекція зони огляду на поверхні сферичної Землі є *колом*.

Необхідно розрахувати: а) лінійні розміри проекції зони огляду L_{112}; б) ширину його смуги $L_{огл}(\Xi_{112})$; в) площу проекції зони $S_{огл}(\Xi_{112})$; г) площу сцени $S_{сц}(\Xi_{112})$, яку зніме КА за час спостереження $\Delta t_{сп}$.

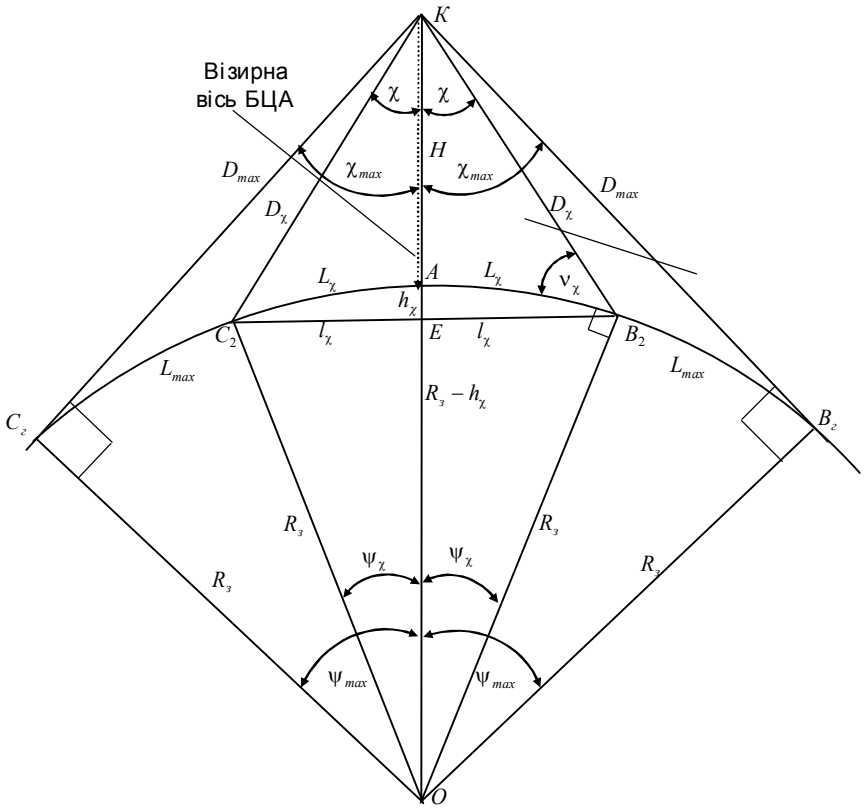


Рис. 4. До ситуації спостережень
в надир сферичної Землі конічною зоною огляду КА

Очевидно, що *лінійні розміри* проекції зони огляду на поверхні сферичної Землі можна характеризувати центральним кутом ψ_χ або довжиною дуги [13]:

$$L_\chi = AB_2 = AC_2 = \psi_\chi R_з . \tag{19}$$

При цьому для знаходження зв'язку між довжиною дуги L_χ, висотою орбіти H і параметрами поля зору КА χ скористаємось відомою теоремою синусів [14], на основі якої із с ΔOB_2K (рис. 4) можна записати:

$$\frac{R_з}{\sin\chi} = \frac{R_з + H}{\sin\left(0{,}5\pi + \nu_\chi\right)} = \frac{D_\chi}{\sin\psi_\chi}, \tag{20}$$

де $D_\chi = D\left(\chi, H\right) = KB_2 = KC_2$ – максимальна дальність від КА до поверхні Землі в межах зони огляду (дальність візування); $\nu_\chi = \nu\left(\chi, H\right)$ – кут візування земної поверхні.

Якщо скористатись відомим [14] співвідношенням $\sin\left(0{,}5\pi + \nu_\chi\right) = \cos\nu_\chi$, то із виразу (20) можна знайти значення *кута візування* земної поверхні як:

$$\nu_\chi = \arccos\left(\frac{R_з + H}{R_з}\sin\chi\right). \tag{21}$$

Використовуючи отримане значення кута візування (21) та співвідношення для суми кутів [14] трикутника ΔOB_2K $\psi_\chi + \chi + \left(0{,}5\pi + \nu_\chi\right) = \pi$, можна знайти центральний кут:

$$\psi_\chi = 0{,}5\pi - \left(\chi + \nu_\chi\right), \tag{22}$$

а далі за формулою (19) розрахувати лінійний розмір проекції зони огляду на земній поверхні, який і є *шириною смуги огляду:*

$$L_{112} = L_{огл}\left(\Xi_{112}\right) = 2L_\chi . \tag{23}$$

Граничні геометричні можливості спостереження за поверхнею Землі із висоти H характеризує максимальний кут $\psi_{\max} = 0{,}5\pi - \chi_{\max}$, який можна знайти із прямокутного трикутника $\Delta OC_{\text{г}}K$ (рис. 4) як:

$$\psi_{\max} = \arccos\left[R_{\text{з}} / \left(R_{\text{з}} + H\right)\right], \tag{24}$$

що дозволяє знайти *максимальний* можливий лінійний розмір зони огляду на поверхні Землі:

$$L_{112m} = 2L_{\max} = C_{\text{г}}B_{\text{г}} = 2R_{\text{з}}\psi_{\max} = 2R_{\text{з}}\left(0{,}5\pi - \chi_{\max}\right). \tag{25}$$

При цьому з урахуванням виразу (22) граничне значення кута поля зору БЦА:

$$\chi_{\max} = 0{,}5\pi - \psi_{\max} = 0{,}5\pi - \arccos\left[R_{\text{з}} / \left(R_{\text{з}} + H\right)\right]. \tag{26}$$

Для знаходження *площі проекції зони огляду* на сферичній поверхні Землі скористаємось формулою [14] для розрахунків площі кульового сегмента C_2AB_2E з висотою h_χ (рис. 4):

$$S_{112} = S_{\text{огл}}\left(\Xi_{112}\right) = 2\pi R_{\text{з}}h_\chi. \tag{27}$$

При цьому, як видно із рисунка 4, *висота* кульового сегмента h_χ є функцією висоти орбіти H і кута поля зору БЦА χ й може бути розрахована як:

$$h_\chi = \grave{A}\hat{A} = R_{\text{ç}} - \sqrt{R_{\text{ç}}^2 - l_\chi^2} = R_{\text{ç}}\left(1 - \cos\psi_\chi\right) = l_\chi \operatorname{ctg}\chi - H. \tag{28}$$

Величина l_χ у формулі (28) є *радіусом* кульового сегмента, який можна розрахувати як:

$$l_\chi = C_2B_2/2 = R_{\text{з}}\sin\psi_\chi. \tag{29}$$

Тоді з урахуванням виразів (28) і (5) шукану площу проекції зони огляду на поверхні сферичної Землі (27) можна знайти за виразом:

$$S_{112} = 2\pi R_{\text{ç}}h_\chi = 2\pi R_{\text{ç}}^2\left(1 - \cos\psi_\chi\right) = 2\pi R_{\text{ç}}\left(l_\chi \operatorname{ctg}\chi - H\right) = 2\pi R_{\text{ç}}\left(R_{\text{ç}}\sin\psi_\chi \operatorname{ctg}\chi - H\right). \tag{30}$$

Отримана формула (30) є достатньо точною (за умови сферичної моделі Землі), але дещо складною для практичного використання. Тому в ряді випадків при малих центральних кутах ψ_χ для орієнтовних розрахунків з урахуванням виразів (19) та (29) можна скористатись спрощеними формулами (рис. 4):

$$S'_{112} = S'_{\text{огл}}\left(\Xi_{112}\right) \approx \pi L_\chi^2 \approx \pi R_{\text{з}}^2\psi_\chi^2, \tag{31}$$

або

$$S''_{112} = S''_{\text{огл}}\left(\Xi_{112}\right) \approx \pi l_\chi^2 \approx \pi R_{\text{з}}^2\sin^2\psi_\chi. \tag{32}$$

При цьому виникає природне питання щодо величини похибок в результатах, отриманих за спрощеними формулами, порівняно з формулою (30), а також критеріїв вибору між самими виразами (31) і (32).

Для оцінювання цих похибок знайдемо відношення між площами (30)–(32), дещо спростивши запис цих виразів. При цьому з урахуванням відомих залежностей тригонометрії [14] $1 - \cos\psi_\chi = 2\sin^2\left(0{,}5\psi_\chi\right)$ та $\sin\psi_\chi = 2\sin\left(0{,}5\psi_\chi\right)\cos\left(0{,}5\psi_\chi\right)$ отримаємо:

$$S'_{\text{огл}}/S_{\text{огл}} = \psi_\chi^2/2\left(1 - \cos\psi_\chi\right) = \psi_\chi^2/4\sin^2\left(0{,}5\psi_\chi\right); \tag{33}$$

$$S''_{\text{огл}}/S_{\text{огл}} = \sin^2\psi_\chi/2\left(1 - \cos\psi_\chi\right) = \sin^2\psi_\chi/4\sin^2\left(0{,}5\psi_\chi\right) = \cos^2\left(0{,}5\psi_\chi\right); \tag{34}$$

$$S'_{\text{огл}}/S''_{\text{огл}} = \psi_\chi^2/\sin^2\psi_\chi. \tag{35}$$

Результати розрахунків похибок у визначенні контрольованих площ на сферичній поверхні Землі при центральних кутах $\psi_\chi \le 30^\circ$ з використанням формул (33)–(35) наведені у таблиці 2.

Таблиця 2

Похибки у розрахунках площ за формулами (33)–(35) при малих центральних кутах

ψ, град.	ψ, рад.	ψ^2, рад.^{2}	$4\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$, %	$\frac{\psi^2}{4\sin^2\left(\frac{\psi}{2}\right)}$, %	$\cos^2\left(\frac{\psi}{2}\right)$, %	$\sin\psi$	$\psi/\sin\psi$, %	$\sin^2\psi$	$\psi^2/\sin^2\psi$, %
0	0	0	0	100,0	100,0	0	100,0	0	100,0

3	0,052360	0,002742	0,002741	100,0	99,9	0,052336	100,0	0,002740	100,1
6	0,104720	0,010966	0,010956	100,1	99,7	0,104528	100,1	0,010926	100,4
9	0,157080	0,024674	0,024623	100,2	99,4	0,156434	100,4	0,024472	100,8
12	0,209440	0,043864	0,043704	100,4	98,9	0,207917	100,7	0,043227	101,5
15	0,261799	0,068539	0,068148	100,6	98,3	0,258819	101,2	0,066987	102,3
18	0,314159	0,098696	0,097886	100,8	97,6	0,309017	101,7	0,095492	103,4
21	0,366519	0,134336	0,132839	101,1	96,7	0,358368	102,3	0,128428	104,6
24	0,418879	0,175460	0,172909	101,4	95,7	0,406737	103,0	0,165435	106,1
27	0,471239	0,222066	0,217987	101,9	94,6	0,453390	103,9	0,206107	107,7
30	0,523599	0,274156	0,267949	102,3	93,3	0,500000	104,7	0,25000	109,7

Аналіз представлених у таблиці 2 результатів показує, що:

а) при кутах $\psi_\chi \le 15^\circ$ з відносною похибкою біля 1 % виконується умова $\psi_\chi \approx \sin\psi_\chi$, де ψ_χ вимірюється в радіанах;

б) за формулою (31) розміри контрольованої площі можна розраховувати з відносною похибкою біля 1 % при кутах $\psi_\chi \le 20^\circ$;

в) за формулою (32) розміри контрольованої площі можна розраховувати з відносною похибкою біля 1 % при кутах $\psi_\chi \le 12^\circ$.

А це означає, що при малих центральних кутах $\psi_\chi = \psi_\chi(\chi, H)$ формули (31) та (32) дають майже однакові результати і ними можна користуватись замість більш складної залежності (30).

Наприклад, якщо врахувати, що в задачах ДЗЗ зазвичай застосовують майже колові орбіти з висотою $Í_i \approx 600...1000$, то за формулами (21) та (22) можна розрахувати граничні значення кутів поля зору БЦА χ та *візування* земної поверхні ν_χ, за яких виконується умова $\psi_\chi \le 15^\circ$.

Таблиця 3

Значення центрального кута ψ_χ як функції висоти колової орбіти H_o і кута поля зору χ

Кут χ, град.	Кут χ, рад.	Висота орбіти H_o, км								
		600	650	700	750	800	850	900	950	1000
1	0,01745	0,09420	0,10204	0,10989	0,11774	0,12558	0,13343	0,14128	0,14913	0,15698
3	0,05236	0,28283	0,30640	0,32997	0,35355	0,37712	0,40069	0,42427	0,44785	0,47142
5	0,08727	0,47226	0,51163	0,55100	0,59038	0,62976	0,66914	0,70853	0,74791	0,78730
7	0,12217	0,66302	0,71832	0,77362	0,82894	0,88426	0,93958	0,99492	1,05026	1,10561
9	0,15708	0,85568	0,92708	0,99849	1,06993	1,14138	1,21285	1,28433	1,35583	1,42735
11	0,19199	1,05079	1,13854	1,22632	1,31412	1,40196	1,48982	1,57772	1,66564	1,75359
13	0,22689	1,24899	1,35338	1,45781	1,56230	1,66683	1,77141	1,87605	1,98073	2,08547
15	0,26180	1,45091	1,57230	1,69376	1,81530	1,93692	2,05862	2,18039	2,30225	2,42419

Результати таких розрахунків надані у таблиці 3. При цьому, як видно із таблиці, вимога $\psi_\chi = \psi_\chi(\chi, H) \le 15^\circ$ виконується з запасом за умови $(\chi \le 15^\circ) \cap (Í_i \le 1000$ êì $)$. Використовуючи запропонований математичний апарат, неважко показати, що граничного значення $\psi_\chi = \psi_\chi(\chi, H) = 15^\circ$ цей кут досягне, наприклад, за умови $(\chi \le 15^\circ) \cap (Í_i \le 6000$ êì $)$.

Необхідну дальність дії КА D_χ можна розрахувати на основі формули (20) як:

$$D_\chi = R_з \sin\psi_\chi / \sin\chi = (R_з + H)\sin\psi_\chi / \cos\nu_\chi . \qquad (36)$$

Таким чином, в задачах детального спостереження за НО *в надир*, коли на КА установлена БЦА з вузьким полем зору, для розрахунків величини контрольованої площі сферичної земної поверхні з достатньою для практики точністю можна користуватись спрощеною формулою (31).

Площу знятої сцени $S_{сц}(\Xi_{112})$ за час спостереження $\Delta t_{сп}$ можна обчислювати за формулами (7) або (11) з використанням виразів (23) та (30) або (32) чи (33).

Висновок. У статті систематизовано та удосконалено математичний апарат, придатний для практичного використання в задачах планування космічних спостережень і оцінювання отриманих результатів. При цьому вирази (2)–(5) та (7)–(11) є оригінальними, а вирази (21), (28)–(35) – удосконаленими для застосування в специфічних умовах.

Список використаної літератури:

1. Загальнодержавна цільова науково-технічна космічна програма України на 2008–2012 роки, затверджена Законом України від 30 вересня 2008 року N 608-VI [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon1.rada.gov.ua.
2. Концепція реалізації державної політики у сфері космічної діяльності на період до 2032 року. Схвалено розпорядженням Кабінету Міністрів України від 30 березня 2011 р. № 238-р. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://zakon1.rada.gov.ua.
3. *Фриз П.В.* Можливий підхід до формалізованого опису специфічних орбіт космічних апаратів у задачах спостереження Землі / *П.В. Фриз, О.М. Кондратов* // Проблеми створення, випробовування, застосування, експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІ НАУ, 2011. – Вип. 5. – С. 147–157.
4. *Фриз П.В.* Основи орбітального руху космічних апаратів : підручник / *П.В. Фриз.* – Житомир : ЖВІ НАУ, 2012. – 348 с.
5. *Ярмольчук Е.Д.* Критерии оценки целевой эффективности космических систем наблюдения Земли / *Е.Д. Ярмольчук* // Проблеми створення, випробовування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІРЕ, 2004. – Вип. 10. – С. 125–132.
6. *Бурштинська Х.В.* Аерокосмічні знімальні системи : навч. посібник / *Х.В. Бурштинська, С.А. Станкевич*. – Львів : Львівська політехніка, 2010. – 292 с.
7. *Манойлов В.П.* Дистанційне зондування Землі із космосу: науково-технічні основи формування й обробки видової інформації : монографія / *В.П. Манойлов, В.В. Омельчук, В.В. Опанюк*. – Житомир : ЖТДУ, 2008. – 384 с.
8. *Фриз С.П.* Можливий підхід до планування спостережень космічними апаратами / *С.П. Фриз, В.В. Петрожалко, В.В. Ожінський* // Проблеми створення, випробовування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІ НАУ, 2011. – Вип. 4. – С. 87–96.
9. *Фриз С.П.* Алгоритм розрахунку площі контрольованої частини заданого району при проведені зйомки з космічних апаратів / *С.П. Фриз* // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – Житомир : ЖДТУ, 2012. – № 1 (60). – С. 69–77.
10. *Петрожалко В.В*. Методика знаходження компромісного рішення при плануванні космічного знімання у складних умовах / *В.В. Петрожалко* // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – Житомир : ЖДТУ, 2012. – № 1 (60). – С. 52–58.
11. *Болобан С.І.* Методика оцінки висоти об’єктів за розмірами їх тіней на космічних знімках / *С.І. Болобан, Р.М. Осадчук* // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – Житомир : ЖДТУ, 2010. – № 3 (54). – С. 32–36.
12. *Пономарев В.В.* Проекция диаграммы направленности передающей антенны искусственного спутника Земли / *В.В. Пономарев и др*. // Проблеми створення, випробовування, застосування та експлуатації складних інформаційних систем : зб. наук. пр. – Житомир : ЖВІРЕ, 2007. – Вип. 11. – С. 97–88.
13. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / *Г.Корн, Т.Корн*. – М. : Наука, 1984. – 832 с.
14. *Выгодский М.Я*. Справочник по высшей математике / *М.Я. Выгодский*. – М. : Наука, 1964. – 872 с.

ФРИЗ Петро Васильович – кандидат технічних наук, доцент, заслужений працівник освіти України, професор кафедри геоінформаційних і космічних систем Житомирського військового інституту ім. С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:

– моделювання процесів у складних технічних системах.

Стаття надійшла до редакції 20.11.2012