УДК 621.396

С.В. Ковбасюк, к.т.н., с.н.с.
В.В. Павлюк, к.т.н., с.н.с.
Житомирський військовий інститут ім. С.П. Корольова
Національного авіаційного університету
О.М. Романов, нач. центру
військова частина А2299

ВИБІР ОПТИМАЛЬНИХ ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМИ ФАЗОВОГО АВТОМАТИЧНОГО ПІДСТРОЮВАННЯ ЧАСТОТИ З УПРАВЛІННЯМ НА ОСНОВІ ОЦІНЮВАННЯ

Отримано аналітичні вирази для оптимізації системи фазового автоматичного підстроювання частоти з управлінням на основі оцінювання, синтезованої за допомогою поліномів, за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки.

Постановка проблеми. Системи фазового автоматичного підстроювання частоти (ФАПЧ) набули надзвичайно широкого застосування практично у всіх галузях науки і техніки. Значну роль системи ФАПЧ відіграють у складі радіоприймальних пристроїв при демодуляції сигналів з цифровою лінійною модуляцією [1–4]. Однією з вимог, що висуваються до систем ФАПЧ, є підвищення точності управління при збереженні стійкості та без значного погіршення перехідного процесу [4]. Зазвичай у комбінованих системах автоматичного управління це досягається шляхом зміни передаточної функції за помилкою за рахунок вибору параметрів розімкненого зв'язку [5]. При синтезі систем, еквівалентних комбінованим, на основі методу синтезу дискретних систем оцінювання з управлінням процесом спостереження [6] та методу синтезу цифрових алгоритмів управління та оцінювання для замкнених автоматичних систем за допомогою поліномів [7] підхід до синтезу компенсаційного каналу відрізняється від попереднього. Тому актуальним є завдання вибору оптимальних параметрів систем ФАПЧ з управлінням на основі оцінювання для мінімізації середньоквадратичної помилки управління.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. В [8] на основі методів [6, 7] було синтезовано структурну схему цифрової системи ФАПЧ з управлінням на основі оцінювання та поліноміальне рівняння, що визначає динаміку процесів у ній. Розв'язання вказаного рівняння дозволяє отримати алгоритми оцінювання та управління в системі ФАПЧ для демодуляції сигналів з цифровою лінійною модуляцією. В [9, 10] отримано такі алгоритми для демодуляції сигналів з фазовою маніпуляцією, закон зміни фази в яких можна подати виразом $x(n) = 2\pi f_0 hn + 1(n)$, в адитивному "білому шумі" з дисперсією σ_x^2, за відсутності динамічних похибок оцінювання і управління для заданого сигналу. Імпульсна передаточна функція генератора, що керується напругою, задається виразом $\frac{M(z)}{N(z)} = \frac{k_Г hz^{-1}}{1-z^{-1}}$; імпульсна передаточна функція фільтра, який придушує складову сигналу з подвоєною частотою, що утворюється після фазового детектору, задається виразом $\frac{S_1(z)}{S_2(z)} = \frac{k_ф(1-\varepsilon)z^{-1}}{1-\varepsilon z^{-1}}$, де $\varepsilon = e^{-h/T}$. Враховуючи це, **метою** статті є отримання аналітичного виразу для середньоквадратичної помилки розробленої системи та її оптимізація.

Постановка завдання. Для заданих вхідних сигналів на основі поліномів динаміки, обраних на етапі синтезу [10]: $A(z) = (1-z^{-1})^2$, $B(z) = \Theta_1\Theta_2(1-z^{-1})^2$ та $C(z) = (1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1}); \Theta_1, \Theta_2 \in 0..1$, необхідно отримати аналітичні вирази для динамічної та випадкової помилок і оптимізувати синтезовану систему ФАПЧ за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки.

Оцінка точності роботи системи. Для визначення динамічної помилки використаємо теорему про кінцеве значення [11]. Підставляючи в передаточну функцію синтезованої системи ФАПЧ за помилкою управління [6] $k_{\tilde{u}} = \frac{\tilde{u}(z)}{g(z)} = \frac{A(z)}{C(z)}$ поліном динаміки $A(z)$ і $C(z)$, отримуємо вираз для визначення помилки за вхідним сигналом у такому вигляді:

$$\tilde{u}(z) = g(z)\frac{(1-z^{-1})^2}{(1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1})}. \quad (1)$$

Підставимо в (1) моделі вхідних сигналів та застосуємо до отриманих виразів теорему про кінцеве значення [11].

Для визначення помилки за положенням представимо фазу вхідного сигналу одиничною функцією

$x_\varphi(n) = 1(n) \doteq \frac{1}{1-z^{-1}}$, що відповідає випадку інформаційної зміни фази сигналу при власній частоті керованого генератора, що збігається з частотою вхідного сигналу. Тоді $\tilde{u}(z) = \frac{(1-z^{-1})}{(1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1})}$, а динамічна помилка $\varepsilon_{дин} = \lim_{n\to\infty} \tilde{u}(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\tilde{u}(z) = \lim_{z\to 1}\frac{(1-z^{-1})^2}{(1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1})} = 0$.

Для визначення помилки за швидкістю представимо фазу вхідного сигналу лінійно зростаючою функцією $x_f(n) = 2\pi f_0 hn \doteq \frac{2\pi f_0 hz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$, що відповідає випадку, коли власна частота керованого генератора не співпадає з постійною частотою $f = const$ вхідного сигналу. Тоді $\tilde{u}(z) = \frac{2\pi fhz^{-1}}{(1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1})}$, а $\varepsilon_{дин} = \lim_{n\to\infty}\tilde{u}(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\tilde{u}(z) = \lim_{z\to 1}\frac{2\pi fhz^{-1}(1-z^{-1})}{(1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1})} = 0$.

Для визначення помилки за прискоренням представимо фазу вхідного сигналу квадратичною функцією $g(n) = 2\pi\nu(hn)^2 \doteq \frac{2\pi\nu h^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})^3}$, що відповідає лінійній зміні частоти вхідного сигналу $f = \nu hn$. Тоді $\tilde{u}(z) = \frac{2\pi\nu h^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})(1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1})}$, а

$$\varepsilon_{дин} = \lim_{n\to\infty}\tilde{u}(n) = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\tilde{u}(z) = \lim_{z\to 1}\frac{2\pi\nu h^2 z^{-1}(1+z^{-1})}{(1-\Theta_1 z^{-1})(1-\Theta_2 z^{-1})} = \frac{4\pi\nu h^2}{(1-\Theta_1)(1-\Theta_2)}. \quad (2)$$

Як і слід було очікувати, синтезована система ФАПЧ, що має астатизм другого порядку, усуває помилки за положенням та швидкістю і може безпомилково слідкувати за сигналом з фазовою маніпуляцією з постійною частотою. Помилка за прискоренням, яка відповідає лінійній зміні частоти сигналу, має кінцеве значення. Як видно з виразу (2), динамічна помилка в синтезованій ФАПЧ може змінюватися вибором коренів характеристичного рівняння Θ_1, Θ_2.

Для оцінки точності роботи системи **при випадкових вхідних сигналах** запишемо дисперсію на виході системи [12]: $D_y = \sigma_x^2 \sum_{i=0}^{\infty} K^2(i) = \sigma_x^2 I^*$, де $K(i)$ – функція ваги дискретної системи з передаточною функцією $k_з^y(z)$, а I^* – її квадратична інтегральна оцінка. Для її пошуку застосуємо дискретний аналог формули Парсеваля: $I^* = \frac{1}{2\pi j}\oint_{|z|=1} K(z)K(z^{-1})z^{-1}dz$. Застосувавши до нього білінійне перетворення $z = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}$ та позначивши $\Psi(\upsilon) = \frac{K^*(\upsilon)}{1+\upsilon}$ і $\Psi(-\upsilon) = \frac{K^*(-\upsilon)}{1-\upsilon}$, отримуємо $I^* = 2I$, де $I = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\Psi(\upsilon)\Psi(-\upsilon)d\upsilon$ – табличний інтеграл Парсеваля. Таким чином, дисперсію на виході системи можна визначити за виразом:

$$D_y = 2\sigma_x^2 I. \quad (3)$$

Передаточну функцію замкненої системи $k_з^y = \frac{y(z)}{g(z)} = \frac{C(z) - A(z)}{C(z)}$ [6] після підстановки в неї поліномів динаміки синтезованої системи ФАПЧ, а також покладання $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta$ можна записати виразом $k_з^y = \frac{y(z)}{g(z)} = \frac{C(z)-A(z)}{C(z)} = \frac{2(1-\Theta)z - (1-\Theta^2)}{z^2 - 2\Theta z + \Theta^2}$. Застосувавши до нього білінійне перетворення, отримуємо:

$$k_з^y(\upsilon) = \frac{-(1-\Theta^2) + 2(1-\Theta)\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}}{\Theta^2 - 2\Theta\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon} + \left(\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\right)^2} = \frac{-(1-\Theta^2)(1-\upsilon)^2 + 2(1-\Theta)(1-\upsilon^2)}{\Theta^2(1-\upsilon)^2 - 2\Theta(1-\upsilon^2) + (1+\upsilon)^2} = K^*(\upsilon)$$

. Складемо вираз для $\Psi(\upsilon)$:

$$\Psi(\upsilon)=\frac{K^*(\upsilon)}{(1+\upsilon)}=$$

$$=\frac{-\left(1-\Theta^2\right)(1-\upsilon)^2+2(1-\Theta)\left(1-\upsilon^2\right)}{\Theta^2(1-\upsilon)^2(1+\upsilon)-2\Theta\left(1-\upsilon^2\right)(1+\upsilon)+(1+\upsilon)^3}=\frac{(1-\Theta)^2+2\left(1-\Theta^2\right)\upsilon-(1-\Theta)(3+\Theta)\upsilon^2}{(1-\Theta)^2+(1-\Theta)(3+\Theta)\upsilon+(1+\Theta)(3-\Theta)\upsilon^2+(1+\Theta)^2},$$

звідки отримаємо такі коефіцієнти поліномів чисельника та знаменника:

$$c_0=(1-\Theta)^2;\,c_1=2\left(1-\Theta^2\right);\,c_2=-(1-\Theta)(3+\Theta);$$

$$d_0=(1-\Theta)^2;\,d_1=(1-\Theta)(3+\Theta);\,d_2=(1+\Theta)(3-\Theta);\,d_3=(1+\Theta)^2.$$

Враховуючи, що поліном $\Psi(\upsilon)$ третього ступеня, запишемо інтеграл Парсеваля:

$$I_3=\frac{c_2^2d_0d_1+\left(c_1^2-2c_0c_2\right)d_0d_3+c_0^2d_2d_3}{2d_0d_3\left(-d_0d_3+d_1d_2\right)}=$$

$$=\frac{(1-\Theta)^5(3+\Theta)^3+\left[4(1-\Theta)^2(1+\Theta)^2+2(1-\Theta)^3(3+\Theta)\right](1-\Theta)^2(1+\Theta)^2+(1-\Theta)^4(1+\Theta)^3(3-\Theta)}{2(1-\Theta)^2(1+\Theta)^2\left(-(1-\Theta)^2(1+\Theta)^2+(1-\Theta)(3+\Theta)(1+\Theta)(3-\Theta)\right)}=$$

$$=\frac{(1-\Theta)^4\left[(1-\Theta)(3+\Theta)^3+2\left[2(1+\Theta)^2+(1-\Theta)(3+\Theta)\right](1+\Theta)^2+(1+\Theta)^3(3-\Theta)\right]}{2(1-\Theta)^3(1+\Theta)^3\left(-\left(1-\Theta^2\right)+\left(9-\Theta^2\right)\right)}=$$

$$=\frac{(1-\Theta)^4\left[(1-\Theta)(3+\Theta)^3+2\left[2(1+\Theta)^2+(1-\Theta)(3+\Theta)\right](1+\Theta)^2+(1+\Theta)^3(3-\Theta)\right]}{16(1-\Theta)^3(1+\Theta)^3}=$$

$$=\frac{(1-\Theta)\left[(1-\Theta)\left(27+27\Theta+9\Theta^2+\Theta^3\right)+\left(10+4\Theta+2\Theta^2\right)\left(1+2\Theta+\Theta^2\right)+\left(1+3\Theta+3\Theta^2+\Theta^3\right)(3-\Theta)\right]}{16(1+\Theta)^3}=$$

$$=\frac{(1-\Theta)\left(40+32\Theta+8\Theta^2\right)}{16(1+\Theta)^3}=\frac{(1-\Theta)\left(5+4\Theta+\Theta^2\right)}{2(1+\Theta)^3}=\frac{5-\Theta-3\Theta^2-\Theta^3}{2\left(1+3\Theta+3\Theta^2+\Theta^3\right)}.$$

На основі формули (3) запишемо кінцеве значення дисперсії на виході системи ФАПЧ:

$$D_y=2\sigma_x^2\frac{5-\Theta-3\Theta^2-\Theta^3}{2\left(1+3\Theta+3\Theta^2+\Theta^3\right)}=\sigma_x^2\frac{5-\Theta-3\Theta^2-\Theta^3}{1+3\Theta+3\Theta^2+\Theta^3}. \tag{4}$$

Визначимо **сумарну квадратичну помилку** в системі ФАПЧ як суму дисперсії за рахунок випадкового вхідного збурення (4) та квадрату динамічної помилки (2): $\varepsilon_\Sigma^2=\sigma^2+\varepsilon_{дин}^2=\sigma_x^2\frac{5-\Theta-3\Theta^2-\Theta^3}{1+3\Theta+3\Theta^2+\Theta^3}+\frac{16\pi^2v^2h^4}{\left(1-\Theta_1\right)^2\left(1-\Theta_2\right)^2}$, або, покладаючи $\Theta=\Theta_1=\Theta_2$, маємо

$$\varepsilon_\Sigma^2=\sigma_x^2\frac{5-\Theta-3\Theta^2-\Theta^3}{1+3\Theta+3\Theta^2+\Theta^3}+\frac{16\pi^2v^2h^4}{(1-\Theta)^4}=\sigma_x^2\frac{5-\Theta-3\Theta^2-\Theta^3}{(1+\Theta)^3}+\frac{16\pi^2v^2h^4}{(1-\Theta)^4}.$$

Для оптимізації синтезованої системи ФАПЧ за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки продиференціюємо отриманий вираз та прирівняємо отриманий результат до нуля: $\frac{\partial\varepsilon^2}{\partial\Theta}=-4\sigma_x^2\frac{4+\Theta}{(1+\Theta)^4}+4\frac{16\pi^2v^2h^4}{(1-\Theta)^5}=0$. У результаті отримуємо вираз, розв'язання якого після підстановки конкретних значень дозволяє визначити оптимальні значення коренів характеристичного рівняння Θ:

$$(4+\Theta)(1-\Theta)^5=\frac{16\pi^2v^2h^4}{\sigma_x^2}(1+\Theta)^4,\Theta\neq\pm1. \tag{5}$$

Підставивши в отримане рівняння (5) дисперсію вхідного сигналу $\sigma_x^2=10^{-3}$, період квантування $h=0{,}00001$с, швидкість зміни частоти $v=1\frac{\text{Ãö}}{\text{ñ}}$, та обравши з отриманих коренів лише дійсні, що задовольняють умовам стійкості та можливості фізичної реалізації, отримуємо розв'язок $\Theta=0{,}9986$, при якому середньоквадратична помилка приймає значення $\varepsilon=\sqrt{\varepsilon_\Sigma^2}=1{,}4708\cdot10^{-3}$. Для об'єктивної оцінки отриманого значення обчислено середньоквадратичну помилку в системі ФАПЧ з диференційним зв'язком, еквівалентній комбінованій, зв'язок по задаючій дії в якій синтезований із умови підвищення порядку астатизму [5], при тих же параметрах: $\varepsilon_к=2{,}8816\cdot10^{-3}$. В синтезованій системі ФАПЧ середньоквадратична помилка менше в $\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon}=\frac{2{,}8816\cdot10^{-3}}{1{,}4708\cdot10^{-3}}=1{,}9592$ раза. Графіки середньоквадратичної помилки в обох систем ФАПЧ при вказаних параметрах надані на рисунку 1.

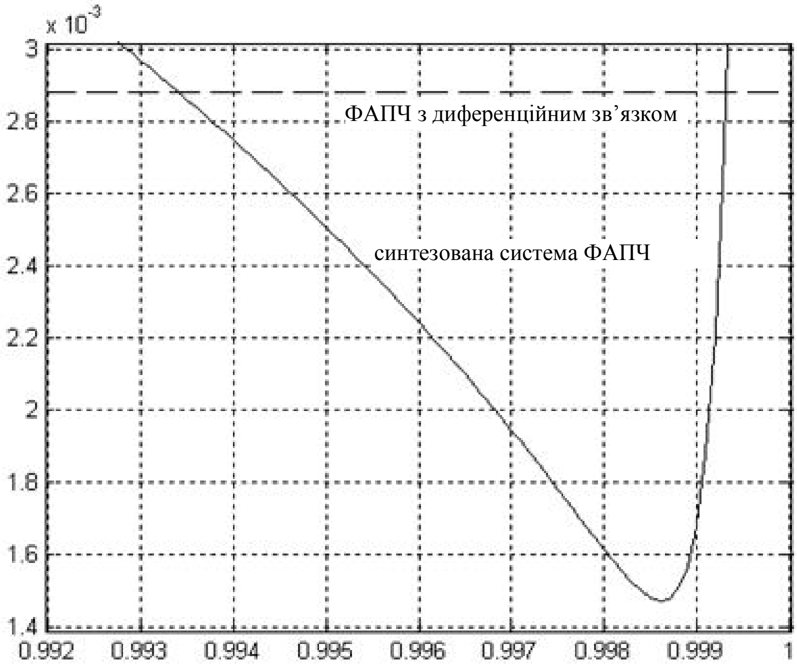

Рис. 1. Порівняння середньоквадратичної помилки систем ФАПЧ з диференціальним зв'язком та синтезованої системи

З графіка видно, що рівність середньоквадратичної помилки в обох системах ФАПЧ досягається при $\Theta = 0{,}9934$ та при $\Theta = 0{,}9993$. При виборі Θ в діапазоні від 0,9934 до 0,9993 середньоквадратична помилка в синтезованій системі ФАПЧ менше, ніж в ФАПЧ з диференційним звуком, еквівалентній комбінованій. Як і було розраховано аналітично, оптимальним значенням Θ для мінімізації середньоквадратичної помилки в синтезованій системі ФАПЧ є $\Theta = 0{,}9986$, при якому вона менша, ніж в ФАПЧ з диференційним зв'язком в 1,9592 раза. На практиці вибір параметрів системи здійснюють на лише за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки, а з врахуванням вимог до перехідного процесу, що звичайно, призводить до збільшення середньоквадратичної помилки порівняно з розрахунковим значенням [5]. Враховуючи, що зі зменшенням Θ час перехідного процесу зменшується, в даному випадку значення коренів характеристичного рівняння Θ доцільно обирати в діапазоні від 0,9934 до 0,9986.

Висновки. Застосування методу синтезу дискретних систем оцінювання з управлінням процесом спостереження та методу синтезу цифрових алгоритмів управління та оцінювання для замкнених автоматичних систем за допомогою поліномів дозволяє побудувати цифрові системи ФАПЧ для демодуляції сигналів зв'язку високої точності. Можливість вибору коренів характеристичного рівняння дозволяє отримати як систему ФАПЧ, оптимальну за критерієм мінімуму середньоквадратичної помилки, так і здійснити компромісне налаштування з врахуванням перехідних процесів.

Список використаної літератури:

1. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение / *Б.Скляр.* – 2-ое изд. – М. : Вильямс, 2007. – 1104 с.
2. *Айфичер Э.С.* Цифровая обработка сигналов: практический поход / *Э.С. Айфичер, Б.У. Девис.* – М. : Вильямс, 2004. – 534 с.
3. *Dean Banerjee.* PLL Performance, Simulation and Design, Fourth Edition / Dean Banerjee [Електронний ресурс]. – 2006. – 344 p. – Режим доступу : http://www.national.com/assets/en/boards/deansbook4.pdf.
4. *Otnes R.* Improved receivers for digital High Frequency communications: Iterative channel estimation, equalization, and decoding (adaptive turbo equalization) / *R.Otnes* // Department of Telecommunications. Faculty of Information Technology, Mathematics and Electrical Engineering. Norwegian University of Science and Technology. – Trondheim, 2002. – 201 p.
5. *Зайцев Г.Ф.* Синтез следящих систем высокой точности / *Г.Ф. Зайцев.* – К. : Техніка, 1971. – 202 с.

6. *Пушкарев Ю.А.* Анализ и синтез дискретных систем оценивания : метод. рекоменд. / *Ю.А. Пушкарев*. – Житомир : ЖВУРЭ ПВО, 1989. – 326 с.
7. *Пушкарьов Ю.О.* Поліноміальний синтез алгоритмів управління на основі оцінювання для замкнутих автоматичних систем / *Ю.О. Пушкарьов, Д.В. П'ясковський, С.В. Водоп'ян* // Проблеми створення, випробування та експлуатації складних інформаційних систем космічного та наземного базування : зб. наук. пр. ЖВІРЕ. – 1999. – № 2. – С. 68–74.
8. *Водоп'ян С.В.* Поліноміальний синтез структури цифрових еквівалентних комбінованим систем фазової автопідстройки частоти для демодуляції фазоманіпульованих сигналів зв'язку / *С.В. Водоп'ян, Д.В. Пясковський, О.М. Романов* // Вісник ЖДТУ / Технічні науки. – 2009. – № 4 (51). – С. 124–129.
9. *Водоп'ян С.В.* Алгоритм цифрової еквівалентної комбінованій системи фазового автопідстроювання частоти для демодуляції сигналів з фазовою маніпуляцією / *С.В. Водоп'ян, Д.В. Пясковський, О.М. Романов* // Сучасний захист інформації : наук.-техн. журнал. – 2010. – № 2. – С. 72–80.
10. *Романов О.М.* Алгоритми оцінювання та управління цифрової еквівалентної комбінованій системи фазового автоматичного підстроювання частоти другого порядку астатизму / *О.М. Романов* // Системи управління, навігації та зв'язку. – 2011. – № 4 (20). – С. 294–297.
11. *Острём К.* Системы управления с ЭВМ / *К.Острём, Б.Виттенмарк* ; пер. с англ. ; под ред. *С.П. Чеботарева*. – М. : Мир, 1987. – 480 с.
12. *Пушкарев Ю.А.* Основы автоматического управления систем радиоэлектронных средств : учеб. пособие / *Ю.А. Пушкарев.* – Житомир : ЖВУРЭ ПВО, 1991. – 480 с.

КОВБАСЮК Сергій Валентинович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник науково-дослідної лабораторії наукового центру Житомирського військового інституту імені С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
– удосконалення алгоритмів функціонування складних інформаційних радіотехнічних систем;
– цифрова обробка сигналів.

ПАВЛЮК Володимир Володимирович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, начальник науково-дослідної лабораторії наукового центру Житомирського військового інституту імені С.П. Корольова Національного авіаційного університету.

Наукові інтереси:
– удосконалення блоків та алгоритмів функціонування радіотехнічних систем;
– технічний аналіз та цифрова обробка сигналів систем радіозв'язку.

РОМАНОВ Олексій Миколайович – начальник центру військової частини А2299

Наукові інтереси:
– технічний аналіз сигналів систем радіозв'язку;
– удосконалення методів демодуляції фазоманіпульованих сигналів

Стаття надійшла до редакції 07.02.2013