Леонова М. В., здобувач
Полтавський національний педагогічний університет
імені В.Г. Короленка

ПОЛІНОМІАЛЬНЕ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ РОЗКЛАДУ ОДНОГО ПРИЛАДУ

Задачі впорядкування виникають всюди, де існує можливість вибору певної черговості виконання робіт: при розподілі робіт на виробництві, формування черговості виконання програм в обчислювальному центрі, організація відпочинку у вихідні дні тощо. Однією з найбільш важливих задач такого типу є задача розкладу одного приладу. Вона розглядається зокрема у працях Коффмана Е.Г., Танаєва Е.Г., Згуровського М.З., Павлов О.А. тощо [1-4]. Мета розв’язання задачі полягає в тому, щоб при заданих властивостях завдань та ресурсів і накладених на них обмеженнях знайти ефективний алгоритм упорядкування завдань, що оптимізує бажану міру ефективності

Розглянемо одну задачу побудови розкладу для приладу в постановці [5]. Задано множину $J_k = 1, 2, ..., k$ номерів завдань. Кожне завдання має додатну вагу w_i, час обробки p_i і час очікування r_i, коли воно недоступне для обслуговування. Задача: визначити розклад, на якому буде досягатися мінімальний час обслуговування всіх завдань.

Часом початку виконання завдання, що виконується першим, є $y_1 = x_1$, часом його завершення – $y_1 + p_{i_1}$, $x = x_1, ..., x_k \in E_k \ R$, $R = r_1, ..., r_k$, $r_i \geq 0, \forall i \in J_k$.

Часом початку виконання завдання, що виконується другим, є максимальне значення із x_2 та $y_1 + p_{i_1}$, тобто $y_2 = \max \ x_2, y_1 + p_{i_1}$, а часом закінчення – $y_2 + p_{i_2}$.

Аналогічно часом початку виконання завдання, що виконується k-тим, є $y_k = \max \ x_k, y_{k-1} + p_{i_{k-1}}$, часом завершення – $y_k + p_{i_k}$.

Маємо цільову функцію, що мінімізує час завершення обслуговування $y_k + p_{i_k}$, що рівносильне мінімізації часу початку останнього завдання: $F_1 = y_k = \max \ x_k, y_{k-1} + p_{i_{k-1}} \to \min$.

З іншого боку в задачі час завершення останнього завдання (або цільову функцію) можна розглядати у такому вигляді $F_1 = r_1 + \sum_{i=1}^{k} p_i + \sum_{j=1}^{k-1} z_j$, де r_1 – час початку виконання першого завдання розв’язку, $\sum_{i=1}^{k} p_i$ – сума всіх p, $\sum z_j$ – сума усіх простоїв пристрою.

Простої розраховуються за формулами:

$$z_1 = \max \ 0; r_2 - p_1 - r_1 \ ; \ \ldots \ z_{k-1} = \max \left\{ 0; r_k - \sum_{i=1}^{k-1} p_i - r_1 - \sum_{j=1}^{k-2} z_j \right\}.$$

Твердження 1. Оптимальним розв’язком задачі знаходження розкладу роботи одного приладу з мінімізацією часу завершення виконання останнього завдання є упорядкування $\sigma = 1, ..., k$ завдань згідно упорядкуванню по неспаданню елементів перестановок $X = r_1, ..., r_k \in E_{kn} \ R$, $r_1 \leq r_2 \leq ... \leq r_k$, де $R = r_1, ..., r_k$ – мультимножина часів очікування завдань.

Оскільки упорядкування елементів може бути здійснено поліноміальним алгоритмом, то дане твердження доводить розв’язність задачі поліноміально.

Твердження 2. Якщо у розв’язку $X = r_1, ..., r_{k-1}, r_k$ простій $z_{k-1} > 0$, то час початку виконання k-го завдання $y_k = r_k$, а значення цільової функції обчислюється за формулою $F_1 = r_k + p_k$.

Література

1. Конвей Р.В. Теория расписаний / Р.В. Конвей, В.Л. Максвелл, Л.В. Миллер. – М.: Наука, 1975. – 360 с.
2. Коффман Э.Г. Теория расписаний и вычислительные машины / Э.Г. Коффман. – М.: Наука. – 1984. – 336 с.
3. Танаев В.С. Введение в теорию расписаний / С.В. Танаев, В.В. Шкурба. – М.: Наука. – 1975. – 257 с.
4. Згуровский М.З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами: Монография / М.З. Згуровский, А.А. Павлов.– К.: Наукова думка. – 2010.– 573 с.
5. Шерешик Н.Ю. Полиэдральные свойства задачи обслуживания различных требований одним прибором / Н.Ю. Шерешик// Тезисы докладов XVI Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, ИСЭМ СО РАН. – 2014. – С. 96