УДК 519.161

А.В. Морозов, к.т.н.
Житомирський державний технологічний університет

ПРО МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЗАДАЧ КЛАСІВ ЛИСТОНОШІ ТА КОМІВОЯЖЕРА

Запропоновано класифікацію задач маршрутизації класів листоноші та комівояжера. Класифікація ґрунтується на описі базової моделі транспортної мережі, з якої випливають різні постановки важливих практичних завдань побудови маршрутів, що задовольняють заданим обмеженням і є оптимальними у розумінні обраного критерію. Одним з обмежень, що суттєво ускладнює вирішення цих задач, є вимога замкненості маршрутів, яка висувається у тих випадках, коли транспортний засіб починає і закінчує рух в одному пункті (базі). Інше обмеження полягає у тому, що замкнений маршрут транспортного засобу повинен містити визначені пункти та ділянки транспортної мережі. І, врешті, потрібно, щоб замкнений маршрут проходив кожну вказану ділянку і кожний вказаний пункт лише один раз.

У статті розглянуто такі задачі, як задача маршрутизації транспорту, класична задача комівояжера, гамільтонова задача комівояжера, задача про китайського листоношу, задача про сільського листоношу, загальна задача комівояжера, гамільтонова та кільцева задачі про сільського листоношу.

В умовах кожної з розглянутих задач маршрутизації міститься опис мережі комунікацій, яка визначає множину можливих шляхів слідування одного або декількох рухомих об'єктів. Тому для кожної задачі одним з вхідних параметрів є зважений граф $H = (V, U)$ з множиною вершин V і множиною ребер U.

Ключові слова: *транспортна мережа; задача комівояжера; гамільтонова задача комівояжера; загальна задача комівояжера; задача про китайського листоношу; задача про сільського листоношу; гамільтонова та кільцеві задачі про сільського листоношу.*

Вступ. Постановка проблеми. Проблема маршрутизації потоків сировини, товарів, енергоресурсів, інформації є однією з найбільш актуальних для сучасної промисловості, транспорту, державного управління. Задачі маршрутизації на автомобільному транспорті та методи їх розв'язання вивчаються в межах наукового напряму – транспортної логістики, математичний апарат якої представлений теорією графів і дослідженням операцій.

В умовах кожної задачі маршрутизації міститься опис мережі комунікацій, що визначає множину можливих шляхів слідування одного або декількох рухомих об'єктів. Як правило, структурні параметри мережі залишаються незмінними від початку і до закінчення процесу розв’язання задачі.

Першою задачею транспортної логістики прийнято вважати задачу маршрутизації транспорту (ЗМТ), яку поставили Данциг і Рамсер [1]. Вона полягає у тому, що кожному споживачу i, $i = \overline{1, n}$, має бути доставлений однорідний вантаж у необхідній кількості d_i з єдиною базою $n + 1$ при використанні K транспортних засобів однакової місткості S. Передбачається, що вантаж споживачу i доставляється лише одним транспортним засобом, що повертається на базу. Вартість d_{ij} перевезення з пункту i в пункт j, $i, j \in N \cup \{n+1\}$, $|N| = n$, не залежить від обсягу (ваги) вантажу, і $d_{ij} = d_{ji}$. Припустимим розв’язком ЗМТ є множина N з K перестановок σ_k, що визначають послідовності доставки вантажів споживачам і задовольняють обмеження місткості транспортного засобу: $\sum_{i \in \sigma_k} d_i \le S$. Для знаходження оптимального розв’язку ЗМТ потрібно знайти мінімум $\sum_{k=1}^{K} \sum_{i, j \in \sigma_k} d_{ij}$. Обмеження, що являють вихідне розбиття, формують повний граф з $n + 1$ вершинами, які відповідають пунктам споживання та базі, і ребрами з вагами, що дорівнюють d_{ij}. Повний неорієнтований зважений граф є математичною моделлю транспортної мережі у ЗМТ.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У [1] сформульовано ЗМТ, яку називають класичною задачею маршрутизації. У монографіях [2, 3] розглянуто вузлові питання проблеми комівояжера, що напряму випливають з постановки ЗМТ, сформульовано та узагальнено ряд частинних випадків та узагальнень задачі комівояжера (ЗК), запропоновано точні та наближені методи їх розв’язання. У [4] сформульовано математичні моделі детермінованих оптимізаційних задач транспортної логістики. У роботах [5, 6, 9, 10] надано математичні постановки та розроблено точні методи розв’язання двох варіантів задачі про сільського листоношу. У [7, 8] розглянуто фундаментальні задачі оптимізації замкнених маршрутів на транспортних мережах.

Викладення основного матеріалу. Назвемо базовою моделлю транспортної мережі в задачі маршрутизації зважений граф $H=(V,U)$ з множиною вершин V і множиною ребер U. Вершина $i\in V$, $|V|=n$, може відповідати споживачу вантажу, населеному пункту області або району, перехрестю доріг міста тощо. Вершини i та j утворюють у графі $H=(V,U)$ ребро $\{i,j\}$, якщо вони представлені населеними пунктами, безпосередньо зв'язані відрізками траси, сусідніми перехрестями вулиць на карті міста тощо. Граф H не містить петель, тобто ребер $\{i,i\}$. Кожному ребру $\{i,j\}$ приписано вагу $d_{ij}\in R_0^+$, дорівнює відстані або вартості переміщення з i у j, $d_{ij}=d_{ji}$, $i,j=\overline{1,n}$, $d_{ii}=\infty$, $i=\overline{1,n}$, R_0^+ – множина дійсних невід'ємних чисел.

Якщо в умовах задачі маршрутизації вказані властивості переміщення d_{ij} і d_{ji} між пунктами i та j, то можливо, що не для всіх пар $\{i,j\}\in U$, $d_{ij}=d_{ji}$. У цьому випадку транспортну мережу зручно представити зваженим орієнтованим графом $G=(V,E)$, в якому будь-які дві вершини i та j, $\{i,j\}\in U$, з'єднані парою дуг $(i,j)\in E$ і $(j,i)\in E$. Для ділянки $\{i,j\}$ дорожнього полотна з одностороннім рухом від i до j (від j до i) можна покласти $d_{ji}=\infty\left(d_{ij}=\infty\right)$, тобто видалити з E дугу (i,j) (дугу (j,i)). Транспортна мережа, в якій усі пункти зв'язані дорожніми ділянками з одностороннім рухом, моделюється орграфом (V, A), де A – множина дуг, таких, що якщо $(i,j)\in A$, то $(j,i)\notin A$, і якщо $(j,i)\in A$, то $(i,j)\notin A$. У тих випадках, коли для деяких пар дуг (i,j) і (j,i), $d_{ij}=d_{ji}\neq\infty$, низка задач маршрутизації розв'язується на транспортній мережі, що представлена змішаним графом (V, B, F), де B – множина дуг, а F – множина ребер $\{i,j\}$. Кожне ребро $\{i,j\}$ відповідає в орграфі $G=(V,E)$ парі дуг (i,j) і (j,i), що мають однакову вартість.

Формулювання базової моделі транспортної мережі дає можливість сформулювати цілий ряд оптимізаційних задач маршрутизації. Серед них важливе місце займають задачі знаходження незамкнених маршрутів, що задовольняють певним обмеженням. Вони зводяться до задачі побудови у мережі відповідних ланцюгів із заданої вершини s у фіксовану вершину t або у всі досяжні вершини з s.

Нехай в умовах ЗМТ $K = 1$, тобто n споживачів обслуговує один транспортний засіб і $\sum_{i=1}^{n} d_i \le S$. У такому випадку ЗМТ формулюється як ЗК: потрібно побудувати цикл, що проходить по усіх $n + 1$ вершинах мережі, яка представлена повним графом, лише один раз і на якому досягається мінімум транспортних затрат.

ЗК – одна з основоположних *NP*-повних задач комбінаторної оптимізації, пов'язана з цілим рядом важливих, не завжди очевидних практичних застосувань. У сукупності зі своїми численними окремими випадками, варіантами й узагальненнями вона утворює клас задач проблеми комівояжера. Проблема комівояжера – це безперервно розширювана область оптимізаційних дискретних задач, кожна з яких перетвориться в наступну задачу: для матриці $\left[d_{ij}\right]_n$, де $d_{ij}\in R_0^+$, $i\neq j$, $d_{ii}=\infty$, $i=\overline{1,\, n}$, знайти таку перестановку $\tau^*=\left(\tau^*[1],\ \tau^*[2],\ \ldots,\ \tau^*[n]\right)$ множини $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, що сума $d_{\tau^*[1]\tau^*[2]}+d_{\tau^*[2]\tau^*[3]}+\ldots+d_{\tau^*[n-1]\tau^*[n]}+d_{\tau^*[n]\tau^*[1]}$ має мінімальне значення. Перестановка τ^* називається оптимальним обходом, а послідовність $\tau^*=\left(\tau^*[1],\ \tau^*[2],\ \ldots,\ \tau^*[n],\ \tau^*[1]\right)$ – оптимальним маршрутом (гамільтоновим циклом мінімальної вартості повного зваженого графа $H_n=(V,\ E_n)$).

Іншими словами, в ЗК потрібно знайти циклічну перестановку τ^* номерів стовпців матриці вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$ з дійсними невід'ємними числами d_{ij}, $i\neq j$, $d_{ii}=\infty$, $i=\overline{1,\, n}$, що мінімізують цільовий функціонал:

$$D(\tau)=\sum_{i=1}^{n} d_{\tau[i]},$$

де $\tau=\left(\tau[1],\ \tau[2],\ \ldots,\ \tau[n]\right)$ – циклічна перестановка або обхід, якому відповідає маршрут комівояжера $\left(\tau[1],\ \tau[2],\ \ldots,\ \tau[n],\ \tau[1]\right)$, де номери $\tau[1], \tau[2],\ \ldots, \tau[n]$ з множини $(1, 2, \ldots, n)$ пунктів або міст відмінні. Величину $D(\tau)$ називають вартістю обходу [8].

У ЗК перетворюються широко відомі задачі маршрутизації. Наприклад, якщо припустити, що в ЗМТ

$\sum_{i=1}^{n} d_i \le S$ і K довільне, то будь-який транспортний засіб може обслугувати будь-яку кількість пунктів споживання. В цьому випадку задача завжди має розв'язок і полягає у побудові K простих циклів із загальною вершиною $n + 1$, які у сукупності містять усі вершини повного графа і доставляють мінімум транспортних затрат. Шукані цикли визначаються додаванням до графа $(K-1)$ копій вершин $n + 1$ з номерами $n + 2, n + 3, \ldots, n + K$ і побудовою мережі з матрицею вартостей $\left[d'_{ij}\right]_{n+K}$, де

$$d'_{ij} = d_{ij},\ \ i, j = \overline{1, n+1};\ d'_{i,n+j} = d_{i,n+1},\ i = \overline{1, n+1},\ \ j = \overline{2, K};$$

$$d'_{i,n+j} = \infty,\ i = \overline{n+2, n+K},\ \ j = \overline{1, K},\ d'_{n+i,j} = d_{n+i,j},\ \ i = \overline{2, K},\ \ j = \overline{1, n}.$$

У побудованій мережі усі K базових вершин несуміжні, й існує гамільтонів цикл, оскільки вихідний граф повний. У результаті розв'язання ЗК для матриці $\left[d_{ij}\right]_{n+K}$ отримаємо оптимальний маршрут, з якого визначаються K простих циклів «злиттям» усіх вершин з номерами, більшими за n в одну вершину з номером $n + 1$. Розглянута задача відома як множинна ЗК [4].

З опису базової моделі транспортної мережі випливають різні постановки важливих прикладних задач побудови маршрутів, що задовольняють заданим обмеженням і є оптимальними в сенсі певного критерію. Одним з обмежень, що суттєво ускладнює розв'язання цих задач є вимога замкнутості маршрутів, яка висувається у тих випадках, коли транспортний засіб починає і закінчує переміщення в одному пункті. Інше обмеження полягає у тому, що замкнений маршрут руху транспортного засобу має містити задані пункти і ділянки транспортної мережі. І, нарешті, потрібно, щоб замкнений маршрут проходив по кожній з вказаних ділянок і по кожному вказаному пункту лише один раз.

Замкнений маршрут, який проходить по кожній вказаній ділянці і пункту мережі лише один раз, а по будь-якому з пунктів, що залишилися, не більше одного разу, назвемо кільцевим [5, 6]. Будемо вважати оптимальним маршрутом той, що має мінімальну вартість (протяжність) серед усіх кільцевих маршрутів мережі.

Перераховані обмеження призводять до формулювань нових оптимізаційних задач, що утворюють клас задач вибору кільцевих маршрутів. Постановки задач цього класу випливають з наступного уточненого опису базової моделі транспортної мережі.

На зв'язному зваженому графі $H = (V, U)$ задано підмножину вершин $N \subseteq V$ і підмножину ребер R, що утворюють сукупність ланцюгів. Сукупність ланцюгів містить підмножину вершин $V(R) \subseteq V$, що не перетинаються з підмножиною N.

Потрібно знайти у графі $H = (V, U)$ цикл, що містить усі вершини з N і всі ребра з R та має мінімальну суму ваг ребер, що входять до нього. Очевидно, якщо цей цикл є простим, то він є оптимальним кільцевим маршрутом на транспортній мережі (рис. 1).

Варіюючи вихідною інформацією представленої моделі, легко отримати формулювання відомих і нових задач маршрутизації.

При $R = \varnothing$, $N = V$ для транспортної мережі, заданої повним графом H_n, маємо ЗК з симетричною матрицею вартостей $\left[d_{ij}\right]_n$, тобто симетричну ЗК (СЗК).

Нехай $R = U$, $N = \varnothing$, а замкнений маршрут, якщо він існує у графі $H = (V, U)$, проходить по кожному ребру $\{i, j\}$ з U рівно один раз і, отже, має вартість $\sum_{\{i,j\}\in U} d_{ij}$. Такий маршрут називається ейлеровим, а граф, що містить його, – ейлеровим графом. Граф $H = (V, U)$ є ейлеровим, якщо і лише якщо граф H зв'язний і всі вершини у V мають парну степінь. На побудову ейлерового циклу в ейлеровому графі $H = (V, U)$ достатньо $O(|V|)$ елементарних операцій [8].

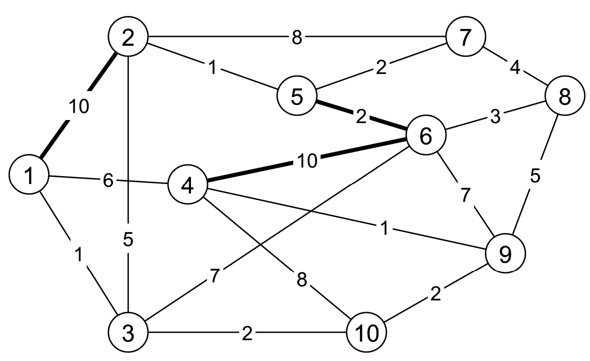

Рис. 1. Транспортна мережа, де $N=\{3,9\}$,
$R=\{\{1,2\},\{6,5\},\{4,6\}\}$, $V(R)=\{1,2,4,5,6\}$;
(1, 2, 5, 6, 4, 9, 10, 3, 1) – оптимальний кільцевий маршрут

Необхідність побудови замкнених маршрутів, які проходять по усім ділянкам транспортної мережі, якій відповідає зв'язний граф H з непарними і парними степенями вершин, призводить до формулювання відомої задачі про китайського листоношу (ЗКЛ). В ЗКЛ замкнений маршрут мінімальної вартості проходить по частині ребер графа більше одного разу. Будь-який зв'язний граф містить маршрут китайського листоноші [7].

Покладемо $R\subset U$, $N=\varnothing$. Задача побудови у зв'язному зваженому графі $H=(V,U)$ замкненого маршруту мінімальної вартості, який містить усі ребра заданої підмножини *R* множини *U*, називається задачею про сільського листоношу (ЗСЛ) [7]. Очевидно, ЗСЛ завжди має розв'язок. Якщо в ЗСЛ додати вимогу, щоб маршрут був кільцевим, то отримаємо кільцеву задачу про сільського листоношу (КЗСЛ).

При $R\subset U$ і $N\cup V(R)=V$ кільцевий маршрут є гамільтоновим циклом зв'язного графа $H=(V,U)$. Задачу знаходження у зв'язному графі $H=(V,U)$ гамільтонового циклу мінімальної вартості, який містить фіксовану множину ребер *R*, назвемо гамільтоновою задачею про сільського листоношу (ГЗСЛ).

Від розв'язання КЗСЛ і ГЗСЛ можна очікувати помітного покращання результатів змінно-добового планування вантажних автомобільних перевезень, що виконуються у більшості випадків у межах одного району. КЗСЛ потребує розв'язання у ситуації, коли база, з якої починається рух транспортного засобу, розташована на одній з виділених ділянок транспортної мережі. Виділені ділянки підлягають ремонту, що містить повну заміну дорожнього покриття або встановлення нових дорожніх знаків. Перевезення необхідних будівельних матеріалів та устаткування здійснюється з бази декількома транспортними засобами з сумарною вантажомісткістю, що забезпечує запитувані обсяги ресурсів для всіх виділених ділянок. Рух по ділянці повністю перекривається відразу після закінчення розвантаження встановленого для нього обсягу поставок, що збігається з початком дорожньо-будівельних робіт.

З розглянутої ситуації випливає щонайменше три питання.

Якщо транспортна мережа представлена зв'язним графом $H=(V,U)$, чи існують у ній кільцеві маршрути $y(R)$, що містять усі ділянки *R*, які підлягають ремонту? При цьому транспортний засіб, які слідує за маршрутом $y(R)$, повертається на базу $v\in y(R)$, відвідуючи кожну ділянку з *R* лише один раз, а кожне перехрестя $w\in V$ – не більше одного разу.

Якщо в мережі немає кільцевих маршрутів $y(R)$, чи містить вона замкнені маршрути, які допускають багаторазове проходження перехресть або вказаних ділянок (рис. 3, *а*, *б*)?

Якщо в мережі не міститься замкнених маршрутів, за якими кожну виділену ділянку можна пройти лише один раз, чи існує у ній простий шлях, який починається у базі і містить усі відрізки дорожнього полотна, що потребує ремонту (рис. 2, *в*)?

При позитивній відповіді на кожне поставлене питання потрібно побудувати оптимальний маршрут транспортного засобу.

Ті самі питання адресуються до випадку, коли база, з якої поставляються матеріальні ресурси, знаходиться у пункті, що пов'язує ділянки мережі, які не потребують ремонтно-відновлювальних робіт, тобто коли $v\notin V(R)$, $R\subset U$.

КЗСЛ і ГЗСЛ можна розглядати як задачі оптимального проектування кільцевих маршрутів міського громадського транспорту, що враховує тролейбусні, автобусні та трамвайні маршрути. Вихідними даними для розв'язання КЗСЛ і ГЗСЛ є результати обстеження пасажиропотоків, що дозволяють виявити транспортні потреби населення на основі аналізу його повсякденного пересування і зв'язків між міськими мікрорайонами та районами. Кінцева мета обстеження полягає у визначенні «вузьких місць» вулично-дорожньої мережі – ділянок, на які припадають найбільші обсяги пасажиропотоків. Кожна така ділянка має бути обов'язково врахована у проектованому кільцевому маршруті. Розв'язок КЗСЛ затребуваний, якщо до проектованого кільцевого маршруту не висунуто ніяких інших умов, окрім проходження транспортного засобу по усіх «вузьких місцях». Очевидно, ГЗСЛ – це КЗСЛ з додатковими вимогами – вимогою зупинки для посадки і висадки пасажирів біля кожної розв'язки міської транспортної мережі або в кожному населеному пункті на розв'язці доріг області чи району.

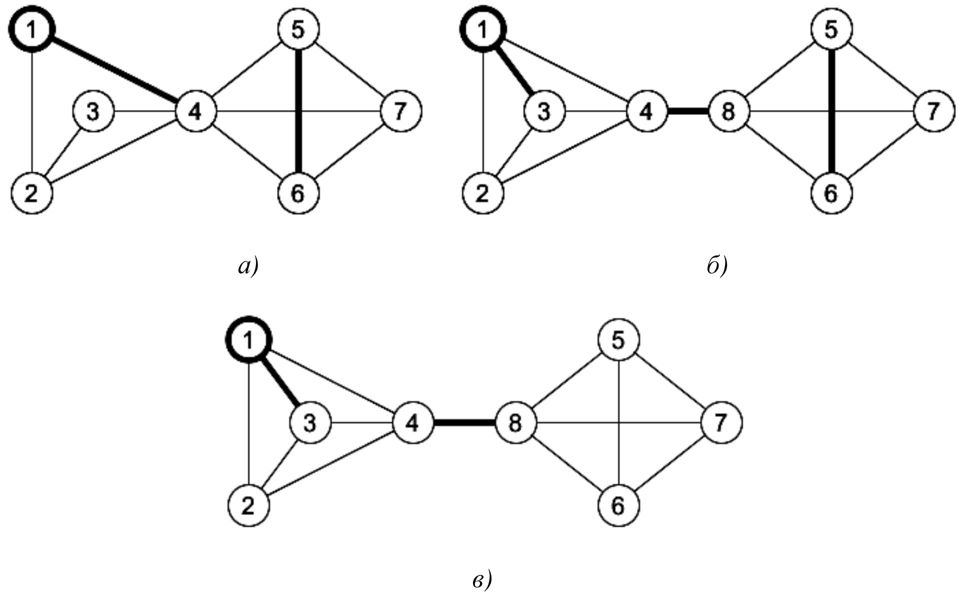

Рис. 2. а) мережа з базою 1, в якій замкнений маршрут (1, 4, 5, 6, 4, 1) двічі проходить по вузлу 4 $\in V(R)$*; б) маршрут (1, 3, 4, 8, 5, 6, 8, 4, 1) двічі проходить по ділянці* $\{4,\ 8\} \in R$; *в) (1, 3, 4, 8) – простий шлях, який містить всі виділені ділянки*

Ці самі задачі стоять перед виконанням маршрутів розвезення кореспонденції, прибирання, патрулювання вулиць району та багатьох видів кур'єрських завдань [7].

У класі задач оптимізації замкнених маршрутів, схематично представленому на рисунку 3, КЗСЛ і ГЗСЛ займають ключові позиції. У них містяться практично всі алгоритмічні особливості графових задач, що отримали статус важкорозв'язних. Тому поява методів пошуку розв'язків КЗСЛ і ГЗСЛ дозволяє розглядати їх як обчислювальну схему, що враховує усі основні підходи до побудови оптимальних замкнених маршрутів. Інакше кажучи, мова йде про можливості заміни алгоритмів розв'язання відомих задач маршрутизації більш загальними методами. Такі методи мають коректно виконувати пошук як поставленої задачі, так і її варіантів, що визначаються, в основному, структурними характеристиками графа і описом параметрів R і N.

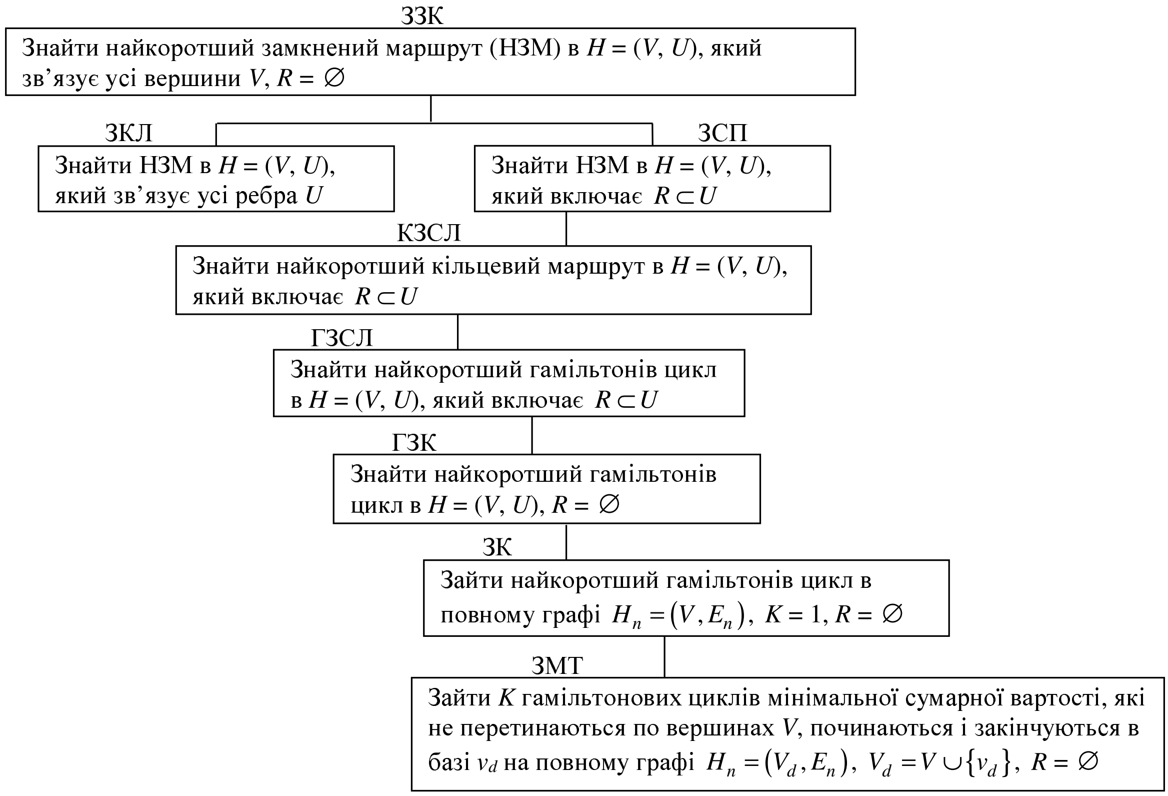

Рис. 3. Список основних задач оптимізації замкнених маршрутів на транспортній мережі: ЗЗК – загальна задача комівояжера; ЗКЛ – задача про китайського листоношу; ЗСЛ – задача про сільського листоношу; КЗСЛ – кільцева задача про сільського листоношу; ГЗСЛ – гамільтонова задача про сільського листоношу; ГЗК – гамільтонова задача комівояжера; ЗК – задача комівояжера; ЗМТ – задача маршрутизації транспорту

Висновки. В результаті виконаної роботи розроблено класифікацію основних задач оптимізації замкнених маршрутів на транспортній мережі. Описано базову модель транспортної мережі, з якої випливають постановки задач побудови маршрутів, що задовольняють заданим обмеженням і є оптимальними у розумінні обраного критерію. Одним з обмежень, що суттєво ускладнює розв'язання цих задач, є вимога замкненості маршрутів, яка висувається у тих випадках, коли транспортний засіб починає і закінчує рух в одному пункті (базі). Інше обмеження полягає у тому, що замкнений маршрут транспортного засобу має враховувати визначені пункти та ділянки транспортної мережі. І ще одне обмеження вимагає, щоб замкнений маршрут проходив по кожній вказаній ділянці і по кожному вказаному пункту лише один раз. Перераховані обмеження стали основою для формулювання нових оптимізаційних задач, що утворюють клас задач вибору кільцевих маршрутів.

Список використаної літератури:

1. *Dantzig G.B.* The Truck Dispatching Problem / *G.B. Dantzig, J.H. Ramser //* Management Sci. – 1959. – Vol. 6., № 1. – P. 80–91.
2. *Панишев А.В.* Модели и методы оптимизации в проблеме коммивояжера : монография / *А.В. Панишев, Д.Д. Плечистый.* – Житомир : ЖГТУ, 2006. – 300 с.
3. *Панишев А.В.* Модели и методы оптимизации замкнутых маршрутов на транспортной сети : монография / *А.В. Панишев, А.В. Морозов.* – Житомир : ЖГТУ, 2014. – 316 с.
4. *Бронштейн Е.М.* Детерменированные оптимизационные задачи транспортной логистики / *Е.М. Бронштейн, Т.А. Заико* // Автоматика и телемеханика. – 2010. – № 10. – С. 133–147.
5. *Морозов А.В.* Метод гілок та меж у гамільтоновій задачі про сільського листоношу / *А.В. Морозов, А.В. Панішев* // Системні дослідження та інформаційні технології. – 2012. – № 2. – С. 57–66.
6. *Панишев А.В.* Модификация метода Литтла для решения кольцевой задачи о сельском почтальоне / *А.В. Панишев, А.В. Морозов, В.А. Скачков* // Искусственный интеллект. – 2010. – Вып. 3. – С.

103–115.
7. *Майника Э.* Алгоритмы оптимизации на сетях и графах / *Э. Майника*. – М. : Мир, 1981. – 323 с.
8. *Пападимитриу Х.* Комбинаторная оптимизация. Алгоритмы и сложность / *Х.Пападимитриу, К.Стайглиц*. – М. : Мир, 1985. – 510 с.
9. *Ovezgeldyyev A.O.* Developing the Branch and Bound Method in the Problem of Searching for the Optimal Cyclic Route (Cyclic Rural Postman Problem) / *A.O. Ovezgeldyyev, A.V. Morozov* // Cybernetics and Systems Analysis. – September 2013, Vol. 49, Issue 5. – Pp. 739–748.
10. *Morozov A.* Modified branch and bound algorithm for solving the Hamiltonian Rural Postman Problem / *A.Morozov, A.Panishev* // Information Models of Knowledge. – Kiev ; Sofia, 2010. – Pp. 442–450.

МОРОЗОВ Андрій Васильович – кандидат технічних наук, декан факультету інформаційно-комп’ютерних технологій, доцент кафедри комп’ютерної інженерії Житомирського державного технологічного університету.

Наукові інтереси:
– комбінаторна оптимізація;
– розподілені та паралельні системи;
– сучасні Інтернет-технології.

Стаття надійшла до редакції 03.08.2015