УДК 519.852.67

Р.В.Баглай, студ., V курс, гр. ПІ-41м
Науковий керівник – к.ф.-м.н., доц. Крижанівський В.Б.
Житомирський державний технологічний університет

ПРЯМО-ДВОЇСТИЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ УПАКОВКИ ТРИВИМІРНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Дана робота є розвитком теорії геометричного проектування. Розглядається задача розміщення опуклих об'єктів, які є багатогранниками, у напівскінченній призмі з метою мінімізації висоти призми.

Оптимізаційні задачі моделювання розміщення двовимірних та тривимірних геометричних об'єктів виникають у різних галузях промисловості, наприклад, в легкій промисловості (при проектуванні розкрою матеріалів), у важкій промисловості (при проектуванні карт розкрою), в енергетиці (при проектуванні машинних залів електростанцій), в будівництві (при розробці генпланів і визначенні варіантів розміщення будинків) та таке інше.

Розглянувши сучасний стан проблеми розміщення неорієнтованих тривимірних геометричних об'єктів, можна зробити висновок, що найбільш розповсюдженим способом розв'язання задач є використання різноманітних евристичних алгоритмів: генетичний алгоритм (genetic algorithm), алгоритм "імітації відпалу" (simulated annealing algorithm) тощо. Тому виникає необхідність у більш поглибленому дослідженні та розробці конструктивних засобів математичного моделювання, дослідженні особливостей математичної моделі і розробці нових ефективних методів розв'язання цього класу задач.

Для формалізації умов взаємного розташування, умови неперетину записуються у вигляді структури лінійних нерівностей. Далі з цієї структури виділяється множина систем лінійних нерівностей, кожна з який являє собою набір обмежень задачі лінійного програмування. До отриманої в такий спосіб задачі лінійного програмування знаходиться двоїста, яка розв'язується прямо-двоїстим алгоритмом.

Постановка задачі. Формально задачу розміщення можна записати у вигляді системи лінійних нерівностей, які описують умови неперетину об'єктів між собою та їх невиходу за межі області, в якій дані об'єкти розміщуються. Метою задачі розміщення є знаходження таких значень координат, при яких висота призми буде мінімальною.

Загальна схема алгоритму. Враховуючи особливості системи лінійних нерівностей даної задачі, будемо вважати, що сформована задача ЛП є двоїстою задачею Д в прямо-двоїстому методі. Привівши усі нерівності до вигляду $\leq$ зможемо легко побудувати пряму задачу П. Таким чином, отримали пряму та двоїсту задачі, що достатньо для використання прямо-двоїстого методу. Їх формальні представлення наведені нижче.

Двоїста задача (Д):

$$\begin{aligned} &\max\ \omega = \pi' b \\ &\pi' A \leq c' \end{aligned}. \tag{1}$$

Пряма задача (П):

$$\begin{aligned} &\min\ z = c'x \\ &Ax = b \geq 0\ . \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Нехай x припустиме в П, а π в Д, то для одночасної оптимальності x і π необхідно та достатньо, що б виконувались наступні умови:

$$\pi_i\Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_j\Big) = \pi_i u_i = 0,\ i = 1,\dots,m, \tag{3}$$

$$x_j\Big(c_j - \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\pi_j\Big) = x_j\nu_j = 0,\ j = 1,\dots,n \tag{4}$$

де u_i - додаткова (slack) змінна і-го обмеження в прямій задачі П, ν_j – штучна (excess) змінна j-го обмеження в двоїстій задачі Д.

Якщо знайти точку x, допустиму в П, для якої $x_j = 0$ для будь-якого j, такого, що $c_j - \pi' A_j > 0$, то ця точка (як і π) була б оптимальною. Прямо-двоїстий алгоритм і базується на ідеї пошуку такого x для даного π. Алгоритм починає роботу з допустимої точки π в Д та зберігає допустимість в двоїстій задачі протягом всієї роботи. Зауважимо, що в даній задачі одночасно повинні виконуватися всі обмеження невиходу і по одному обмеженню неперетину для кожної пари об'єктів.

Обираючи для кожної пари об'єктів одну розділяючу грань можна породити цілу множину задач лінійного програмування. Глобальним оптимумом поставленої вихідної задачі буде мінімальний розв'язок серед породженої множини задач лінійного програмування. Щоб застосувати прямо двоїстий алгоритм слід побудувати припустиму точку для усієї множини задач ЛП. Для цього застосуємо штучний прийом. Суть такого прийому полягає у тому, щоб ввести в прямій задачі додаткову змінну x_{n+1} та ще одне обмеження

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n + x_{n+1} = b_{m+1}. \tag{5}$$

де b_{m+1} обирається більшим, ніж сума значень $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будь-якого можливого рішення задачі П, та покладемо c_{n+1} рівною 0. Очевидно, накладені умови не вплинуть на розв'язок П.

В якості допустимого розв'язку цієї задачі ЛП можна взяти

$$\begin{aligned} &\pi_i = 0, i = 1, \ldots, m \\ &\pi_{m+1} = \min\{c_j \mid j = 1, \ldots, n\} < 0 \end{aligned}. \tag{6}$$

Тоді деякі з нерівностей $\pi' A_j \le c_j$ будуть строгими нерівностями, а деякі перетворяться на рівності. Визначимо наступну множину індексів *J*:

$$J = \{ j : \pi' A_j = c_j \}. \tag{7}$$

З (3) - (4) випливає, що допустима точка x в П оптимальна тоді і тільки тоді, коли $x_j = 0$ для всіх $j \notin J$.

Це приводить до обмеженої прямої задачі (ОП), матриця обмежень якої складається з стовпчиків задачі (П), що входять в множину *J*. Для розв'язку ОП можна використати звичайний симплекс-метод. Якщо для оптимального розв'язок задачі ОП $\xi=0$, то знайдено розв'язок задачі Д і відповідно, задачі П. Якщо $\xi>0$, необхідно розглянути задачу ДОП, двоїсту до обмежено прямої ОП. Розв'язок задачі ДОП можна отримати із задачі ОП, оскільки дані задачі утворюють прямо-двоїсту пару. Розв'язок задачі ДОП використаємо для отримання покращення розв'язку задачі Д.

$$y = \bar{y} + \theta y^* . \tag{8}$$

де $\bar{y}$ - деякий припустимий розв'язок Д, y^* - оптимальний розв'язок ДОП.

Коефіцієнт лінійної комбінації (8) обираємо з наступної формули:

$$\theta = \min_{\substack{j \notin J \\ \pi' A_j^k > 0}} \{ \max_k \{ \frac{c_j - \pi' A_j^k}{\pi' A_j^k} \} \} . \tag{9}$$

де k - індексує обмеження на неперетин для кожної пари об'єктів.

Висновок. У даній роботі була розглянута і описана задача розміщення опуклих 3D геометричних об'єктів у напівнескінченній призмі заданої висоти. Для вирішення описаної проблеми нами було запропоновано модифікацію прямо-двоїстого алгоритму.

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ:

КРИЖАНІВСЬКИЙ Вячеслав Борисович, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри програмного забезпечення систем Житомирського державного технологічного університету. Наукові інтереси: математичне моделювання, геометричне проектування.

БАГЛАЙ Роман Володимирович, магістрант групи ПІ-41м кафедри програмного забезпечення систем Житомирського державного технологічного університету. Наукові інтереси: геометричне проектування.