

## СИНТЕЗ ТА ПОРІВНЯННЯ РОБАСТНИХ $H_2$ ТА $H_\infty$ -РЕГУЛЯТОРІВ

Робастні системи займають значне місце серед сучасних методів в теорії автоматичного керування. Робастні системи управління доцільно використовувати у тих випадках, коли повна математична модель об'єкта невідома, що часто зустрічається в реальних задачах. Такі системи мають властивість зберігати показники якості при зміні в деяких межах параметрів чи структури системи.

В загальному випадку структура об'єкта описується у просторі станів, розділяючи об'єкт на контрольовану та не контрольовану частини:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}_1\mathbf{W} + \mathbf{B}_2\mathbf{U} \\ \mathbf{Z} = \mathbf{C}_1\mathbf{X} + \mathbf{D}_{11}\mathbf{W} + \mathbf{D}_{12}\mathbf{U} \\ \mathbf{Y} = \mathbf{C}_2\mathbf{X} + \mathbf{D}_{21}\mathbf{W} + \mathbf{D}_{22}\mathbf{U} \end{cases}, \quad (1)$$

де  $\mathbf{X}$  – вектор стану,  $\mathbf{U}$  – вектор керування,  $\mathbf{W}$  – вектор збурення,  $\mathbf{Y}$  – вектор вимірюваних виходів,  $\mathbf{Z}$  – вектор контрольованих виходів. Вектор  $\mathbf{Y}$  вимірюється та використовується регулятором для визначення керуючого вектора  $\mathbf{U}$ . Схема такої системи наведена на рисунку 1, а. В даній роботі додатково розглядаються вплив зовнішнього збурення у вигляді шумів  $\mathbf{N}$ , схема такої системи наведена на рисунку 1, б.

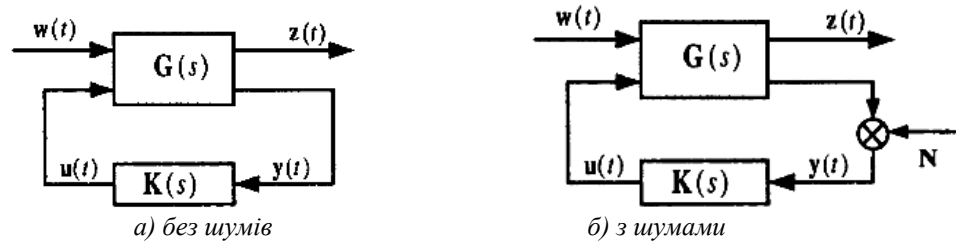


Рис. 1. Структурна схема системи

Для досліджень були обрані  $H_2$  та  $H_\infty$ -регулятори. Для синтезу потрібно мінімізувати відповідно  $H_2$  та  $H_\infty$ -норми, що виконується розв'язанням двох рівнянь Ріккати.

Для  $H_2$ -регулятора:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{A} - \mathbf{X}_2 \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T \mathbf{X}_2 + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 &= 0 \text{ та} \\ \mathbf{A} \mathbf{Y}_2 + \mathbf{Y}_2 \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}_2 \mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 \mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Для  $H_\infty$ -регулятора:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{X}_\infty + \mathbf{X}_\infty \mathbf{A} - \mathbf{X}_\infty (\mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^T - \gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T) \mathbf{X}_\infty + \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1 &= 0 \text{ та} \\ \mathbf{A} \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{Y}_\infty \mathbf{A}^T - \mathbf{Y}_\infty (\mathbf{C}_2^T \mathbf{C}_2 - \gamma^{-2} \mathbf{C}_1^T \mathbf{C}_1) \mathbf{Y}_\infty + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^T &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

На основі знайдених значень  $\mathbf{X}_2$ ,  $\mathbf{Y}_2$ ,  $\mathbf{X}_\infty$ ,  $\mathbf{Y}_\infty$  розраховують матриці регулятора. Для  $H_\infty$ -регулятора, окрім більшої складності самих рівнянь, порівняно з  $H_2$ , з'являється ще одна змінна,  $\gamma$ . Її значення підбирається таким, щоб  $\gamma^2$  було більшим за спектральний радіус між  $\mathbf{X}$  та  $\mathbf{Y}$ .

Модель системи з регулятором наведена на рисунку 2. Перші два входи – шуми вимірювання  $\mathbf{N}$ , інші два входи – збурення  $\mathbf{W}$ , які відпрацьовує регулятор, останні два входи об'єкта керування – керуючий вектор  $\mathbf{U}$ .

Для отримання матриць регулятора при заданих матрицях об'єкта був написаний скрипт мовою програмування середовища MATLAB. Отримані матриці  $H_2$ -регулятора для заданих матриць об'єкта:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,34 & -0,12 & -1,5 & 0,24 \\ 0,51 & -0,93 & 0,71 & 0 \\ -0,84 & -0,19 & 0 & 0 \\ 1,39 & 0 & 0 & 0,41 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -0,15 & 0,12 \\ 0 & 0 & -1,23 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,65 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0,34 & 0,17 \\ 0,15 & 0,63 \\ 0,38 & 0,27 \\ 0,53 & 0,54 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

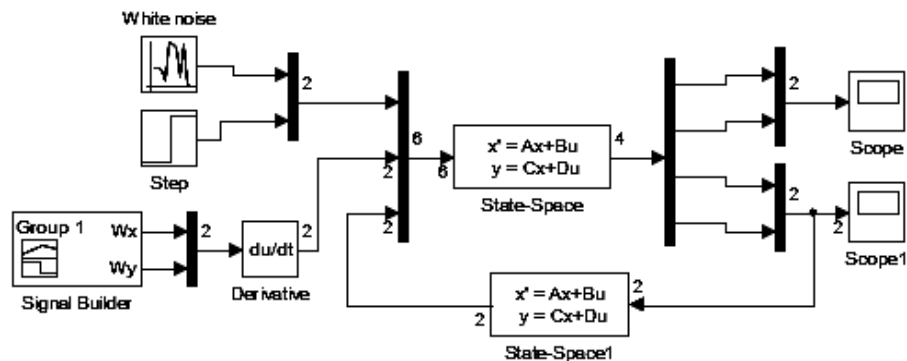


Рис. 2. Модель системи в Simulink

Було проаналізовано роботу регулятора за наявності шумів вимірювання. Графіки контрольованих виходів системи з білим шумом для одного виходу та зі збуренням у вигляді одиничного стрибку для іншого, зображені на рисунку 3.

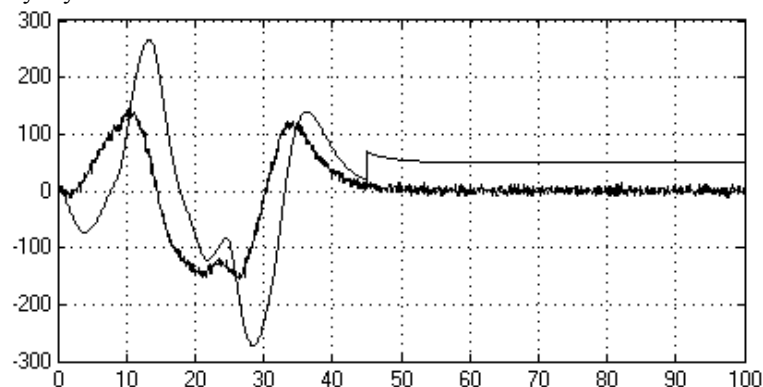


Рис. 3. Графіки виходів системи

Як видно з рисунку 3, система з  $H_2$ -регулятором після дії одиничного стрибка має значну сталу похибку. А система з  $H_\infty$ -регулятором зводить статичну похибку до мінімуму.

Було розроблено скрипт для знаходження моделей робастних  $H_2$  та  $H_\infty$ -регуляторів у програмному пакеті MATLAB/Simulink. Створено модель системи в загальному вигляді, яка дає можливість проводити порівняння регуляторів, зокрема було проаналізовано реакцію на зовнішні збурення і виявлено, що система з  $H_2$ -регулятором має значно більшу статичну похибку ніж з регулятором типу  $H_\infty$ .