УДК 51:330.115

Яремчук С.І., к.ф.-м.н., проф.,
Ясинська О.В., магістрант,
Шатіло Т.Б., студ.,
Житомирський державний технологічний університет

РОЗВ'ЯЗАННЯ МІНІМАКСНОЇ ЗАДАЧІ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ МЕТОДОМ ГІЛОК ТА МЕЖ

Вступ. На практиці часто виникає задача проектування системи, якість роботи якої залежить від фізичних полів, що створюються її компонентами (поля можуть бути тепловими, дифузними і т.д.). Потрібно в заданій області розмістити джерела фізичного поля так, щоб обраний критерій якості досяг екстремального значення. Саме до таких задач належить мінімаксна задача розміщення джерел фізичного поля на фіксовані місця.

До цього часу не було розроблено точного методу розв'язання цієї задачі. Відомі два наближені методи її розв'язання: «Комбінований метод» (Стоян Ю.Г., Путятін В.П.) та «Р-алгоритм» (Яремчук С.І., Бурда Р.В.).

У даній роботі представлений точний метод розв'язання цієї задачі, який є методом гілок та меж.

Математична модель сформульованої задачі має наступний вигляд:

$$f(x)=\max_{k\in[1:K]} f_k(x) \to \min, \qquad (1)$$

де

$$f_k(x)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{k} x_{ij}. \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij}=1, \quad j=[1:N], \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}=1, \quad i=[1:N], \qquad (4)$$

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, & \text{якщо i-те джерело призначене на j-те місце} \\ 0, & \text{якщо i-те джерело не призначене на j-те місце} \end{cases} \qquad (5)$$

$$i\in[1:N], \ j\in[1:N].$$

Де N – розмірність задачі, K – кількість точок заміру.

Тобто (1) - (5) мінімаксна задача з булевими змінними.

Обчислювальна схема методу:

1. Знаходимо опорний план (точка x^0) та оцінку вихідної множини X^0:

1.1 Будуємо матрицю максимумів C^{max}:

$$\left\| c_{ij}^{max} \right\|, \qquad (6)$$

де

$$c_{ij}^{max}=\max_{k\in[1:K]} c_{ij}^{k} \qquad (7)$$

$$i\in[1:N], j\in[1:N] \quad .$$

1.2 На матриці C^{max} розв'язуємо задачу про призначення Угорським алгоритмом. На знайденому при цьому розміщенні x^0 – знаходимо:

$$f_k(x^0)=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij}^{k} x_{ij}^{0}, \qquad k\in[1:K] \qquad (8)$$

1.3 Будуємо матрицю мінімумів C^{min}:

$$\left\| c_{ij}^{min} \right\|, \qquad (9)$$

де

$$c_{ij}^{min}=\min_{k\in[1:K]} c_{ij}^{k}, \qquad (10)$$

$$i\in[1:N], j\in[1:N] \quad .$$

1.4 Знаходимо оцінку вихідної множини X^0 - розв'язуємо Угорським алгоритмом задачу оптимального розміщення на матриці C^{min}. Оцінка множини має вигляд:

$$m(X^0)=\Psi_0, \quad (11)$$

де Ψ_0- оптимум задачі про призначення на матриці C^{min}.

2. Знаходимо $\max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)$, присвоюємо

$$m^*=\max_{k\in[1:K]} f_k(x^0) \quad (12)$$

та формуємо множину Kmax:

$$K_{max}=\{i\in[1:K]:f_i(x^0)=\max_{k\in[1:K]} f_k(x^0)\} \quad (13)$$

3. Нехай маємо деяке x^s– наближення до розв'язку задачі, де $s=0,1,2,\dots$
4. Перевіряємо, чи є дане розміщення (x^s)оптимальним хоча б для одного $k\in K_{max}$. Якщо так, то процес припиняється так як x^s–
5. оптимальний розв'язок, інакше - п.5.
6. Оцінки всіх висячих вершин порівнюються з m^*. Вершини, оцінки яких більше чи дорівнюють m^*, зондуються.
7. Якщо вершин, що висять нема, процес припиняється, за розв'язок обирається розміщення, що відповідає m^*. Інакше для розгалуження обирається та із вершин, що висять, яка має мінімальну оцінку.
8. Обрана множина розгалужується на дві підмножини. Обирається змінна, що ініціює розгалуження. Для цього будується матриця максимумів C^{max}, знаходиться мінімальний елемент побудованої матриці. Якщо такий елемент один, то відповідна змінна обирається такою, що ініціює розгалуження. Інакше для кожного з них виконуються наступні обчислення:

$$\theta_{ij}=\min_{k\neq j} c_{ik}^{max}+\min_{m\neq i} c_{mj}^{max}, \max\theta_{ij}=\theta_{i_s j_s} \quad (14)$$

Змінна $x_{i_s j_s}$ ініціює розгалуження. В одній підмножині цю змінну зафіксовуємо 1, а в іншій – 0.

9. Знаходяться оцінки отриманих підмножин - формується підматриця матриці C^{min}для кожної з отриманих підмножин. Для цього якщо на гілці, що веде в дану вершину$x_{ij}=1$ − викреслюємо рядок і стовпчик, а якщо $x_{ij}=0$, тоді $c_{ij}=\infty$. Розв'язуємо Угорським алгоритмом задачу оптимального розміщення на отриманих підматрицях. Оцінка кожної підмножини має вигляд:

$$m(X^l)=\sum_{i,j\in T_l}\sum c_{ij}x_{ij}+\Psi_l, \quad (15)$$

де Ψ_l- оптимум задачі про призначення на підматриці змінних $\bar{C}_l$, а T_l– множина пар індексів зафіксованих у відповідній вершині.

10. Порівнюємо отримані оцінки з m^*. Якщо $m(X^l)$ більше дорівнює m^*, множина X^l зондується. Якщо розмірність однієї з отриманих підматриць дорівнює 1 і відповідна їй множина не прозондована, то отримано припустимий розв'язок x^{s+1}, інакше перехід до п.12.
11. Знаходиться відповідне значення функції цілі

$$\max_{k\in[1:K]} f_k(x^l) \quad (16)$$

Це є оцінкою відповідної підмножини (множина складається з одного розміщення). Отримується нове m^*, що дорівнює

$$m^*=\max_{k\in[1:K]} f_k(x^l) \quad (17)$$

12. Знову обраховується множина K_{max}:

$$K_{max}=\{i\in[1:K]:f_i(x^l)=\max_{k\in[1:K]} f_k(x^l)\} \quad (18)$$

13. Якщо m^* змінило своє значення на поточній ітерації, здійснюється перехід до п.3, інакше до п.5.

Висновок. Побудовано точний метод розв'язання мінімаксної задачі з булевими змінними, який є методом гілок та меж. Процедура розрахунку оцінок базується на знаходженні оптимального розміщення джерел, з використанням матриці мінімумів (за допомогою Угорського алгоритму). Перевага даного алгоритму полягає в тому, що він дозволяє розв'язувати задачі з великою кількістю точок заміру, проте з невеликою розмірністю (поки що). Програмний продукт реалізовано за допомогою мови програмування C#.